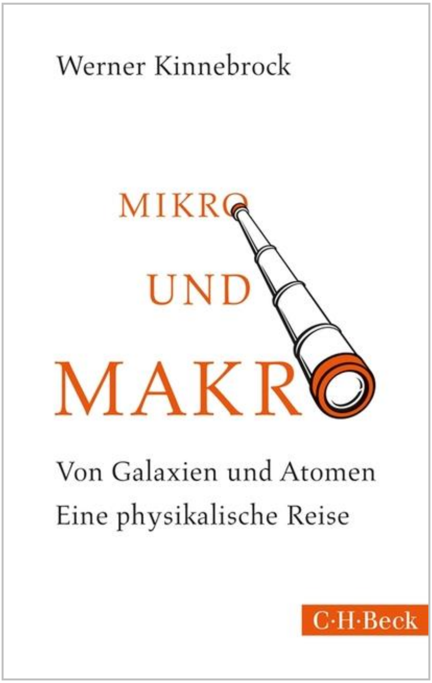
C.H.BECK
www.chbeck.de

Unverkäufliche Leseprobe



Werner Kinnebrock
Mikro und Makro
Von Galaxien und Atomen
Eine physikalische Reise

144 Seiten mit 20 Abbildungen. Gebunden
ISBN: 978-3-406-66028-3

Weitere Informationen finden Sie hier:
http://www.chbeck.de/13090456

2. «Unendlich» mal «unendlich»?

2.1 Das Unendliche in der Natur

Kommt in der Natur der Begriff «unendlich» vor? Wir wissen es nicht. Zumindest wäre es in der Kosmologie möglich. Es besteht die Vermutung, dass das Universum glatt ist, das bedeutet, dass es wie eine Ebene unendlich ausgedehnt ist. Und für ein solches ebenes Universum gilt die Schulgeometrie, genauer: die nach dem griechischen Mathematiker Euklid benannte «euklidische Geometrie». Der Raum könnte dann wie die Ebene unendlich ausgedehnt sein. (Die Geometrie, die eine gekrümmte Oberfläche wie die einer Kugel beschreibt, ist die «nichteuklidische Geometrie».) Die Oberfläche eines Zylinders und auch eines Autoschlauchs ist wiederum euklidisch. Die Mathematiker sprechen im letzteren Fall von einem «Torus». Das Universum könnte durchaus auch wie ein Torus aufgebaut sein (hier ein vierdimensionaler Torus mit einer dreidimensionalen «Oberfläche», also ein «Hypertorus»). In diesem Fall wäre das Weltall also nicht unendlich ausgedehnt, aber immer noch euklidisch.

Im Folgenden betrachten wir den Begriff «unendlich» genauer. Die heutige Mathematik, die die Natur elegant beschreibt, ist ohne den Unendlichkeitsbegriff nicht denkbar.

Im Jahr 1900 hielt der bekannte Göttinger Mathematiker David Hilbert eine Rede in Paris, in der er Georg F. L. P. Cantor als einen der größten Mathematiker des 19. Jahrhunderts pries. Cantor hatte den Begriff «unendlich» in die abstrakte Mengenlehre eingeführt, und Hilbert bezeichnete seine Leistung als «die bewundernswerteste Blüte mathematischen Geistes».

Gleichzeitig forderte er die Mathematiker seiner Zeit auf, im neuen beginnenden 20. Jahrhundert die Mathematik von allen noch bestehenden Unsicherheiten zu befreien. Er konnte nicht ahnen, dass 30 Jahre später einer der größten Mathematiker des 20. Jahrhunderts, Kurt Gödel, nachweisen sollte, dass es Aussagen in der Mathematik gibt, die prinzipiell nicht beweisbar und auch nicht widerlegbar sind.

2.2 «Unendlich» in Zahlen

Die einfachste Form von «unendlich», symbolisiert durch «∞», finden wir in den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... Dies sind die natürlichen Zahlen, gegeben in unendlicher Vielheit: Wir können ewig weiterzählen.

Wenn die Menge der ganzen Zahlen unendlich groß ist, dann erst recht die Menge aller möglichen Zahlen, also die der ganzen Zahlen, Dezimalzahlen, Brüche, positiven und negativen Zahlen. Diese «reellen Zahlen» umfassen wesentlich mehr als die ganzen Zahlen; daher müssen wir vermuten, dass das «Unendlich» der reellen Zahlen größer ist als das der ganzen Zahlen. Und dass dies tatsächlich so ist, kann man beweisen.

Allerdings haben die reellen Zahlen teils merkwürdige Eigenschaften. Wenn wir mit M alle Zahlen zwischen 0 und 1 bezeichnen und wenn R die Menge aller reellen Zahlen ist von minus unendlich bis plus unendlich, dann enthält R offenbar die Menge M. Die Menge M ist eine Teilmenge von R (veranschaulicht durch Abb. 1, nach der die dunklere Punktmenge Teilmenge der helleren Menge ist). Natürlich enthält M unendlich viele Zahlen, genauso wie R.

Die Mathematik liefert nun die Aussage, dass sowohl R als auch M gleichmächtig sind, dass beide Mengen also gleich un-

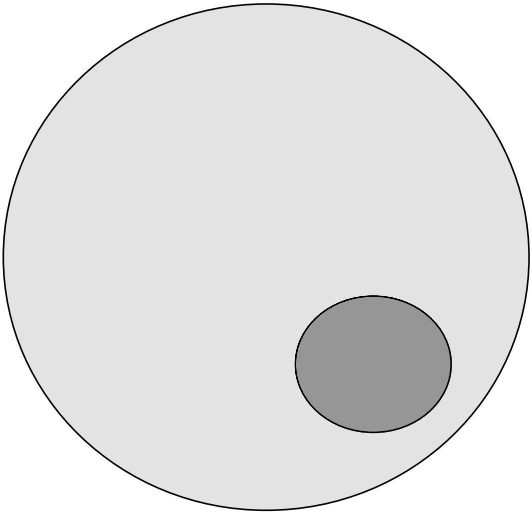


Abbildung 1: Die dunklere Menge ist Teilmenge der helleren. Beide Mengen enthalten unendlich und gleich viele Punkte.

endlich viele Zahlen besitzen. Erstaunlicherweise haben also M und R unendlich viele Zahlen mit gleichem Unendlich.

Dieses Ergebnis lässt sich auch auf Punkte in einer Ebene übertragen. In Abbildung 1 ist die dunklere Menge von Punkten eine Teilmenge der helleren Menge. Beide Mengen enthalten unendlich viele Punkte, beide Unendlich sind gleich, sie enthalten also gleich viele Punkte. Dies widerspricht jeder Anschauung, ist aber mathematisch beweisbar. Die Mathematiker nennen das Unendlich der ganzen Zahlen «unendlich abzählbar», das aller reellen Zahlen das «Unendlich des Kontinuums».

2.3 Wie viele «Unendlich» gibt es?

Wir kennen bisher zwei Größen «Unendlich», das der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... usw. und das aller reellen Zahlen. Eines ist kleiner als das andere. Es entsteht die Frage, ob es weitere «Unendlich» gibt, die eventuell noch größer sind.

Um das herauszufinden, betrachten wir die Menge der Zahlen 1, 2 und 3, wiedergegeben durch:

$$M = \{1,2,3\}.$$

Nehmen wir nur die Zahl 1 heraus, haben wir eine Teilmenge T und können schreiben: $T = \{2,3\}$. Wie viele solcher Teilmengen besitzt M? Es sind offenbar die Teilmengen

$$\{1\}\{2\}\{3\}\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\}\{1,2,3\}.$$

Es ist üblich, die Menge, die gar keine Elemente enthält, mit dem Symbol $\{\}$ als Leermenge zu bezeichnen und sie auch ebenfalls als Teilmenge zu betrachten. Bei Bildung der Menge P(M) aller Teilmengen von M erhalten wir die neue Menge

$$P(M) = \{\{\},\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$

Daraus ergeben sich genau 8 Teilmengen ($8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$).

Allgemein gilt: Eine Menge mit n Elementen hat genau 2^n Teilmengen. Die Menge dieser Teilmengen heißt Potenzmenge. Eine Potenzmenge der 26 Buchstaben des Alphabets hat also $2^{26} = 67\,108\,864$ Teilmengen. Jedes Wort der deutschen Sprache, das nicht zwei gleiche Buchstaben enthält, wäre zum Beispiel Element einer solchen Teilmenge.

Natürlich können wir auch die Potenzmenge einer unendlichen Menge bilden, zum Beispiel die der natürlichen Zahlen. Und auch diese Potenzmenge hat dann unendlich viele Elemente. Mathematisch beweisbar ist, dass die Mächtigkeit einer Potenzmenge größer ist als die Mächtigkeit der Originalmenge. Das heißt: Die Zahl der Elemente hat bei der Potenzmenge ein größeres Unendlich als bei der Originalmenge. Genauer formuliert: Bilden wir von der Menge aller natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... alle möglichen Teilmengen, so sind es natürlich unendlich viele. Dieses Unendlich ist größer als das Unendlich der natürlichen Zahlen.

Daraus ergibt sich eine interessante Folgerung: Sei N die Menge der natürlichen Zahlen. Dann hat die Potenzmenge P(N) in ihrer Mächtigkeit ein größeres Unendlich als N. Bilden wir jetzt die Potenzmenge von P(N), also P(P(N)), so erhalten wir ein noch größeres Unendlich. Dies können wir so ewig fortsetzen und immer wieder neue Potenzmengen bilden. Wir erhalten immer neue Mengen mit noch größerem Unendlich. Darum gilt:

Es gibt unendlich viele Unendlich.

3. Räumliche und zeitliche Distanzen

3.1 Längenmaße im Mikro- und Makrokosmos

Nach diesem Ausflug in die Welt der großen und kleinen Zahlen und zum Begriff «unendlich» wenden wir uns physikalischen Grundgrößen zu. Eine Länge können wir mit dem Lineal oder Meterstab messen und wird wiedergegeben durch Meter.

Für uns, die wir in einer Meter-Minuten-Welt leben, reichen Meter zur Vermessung unserer gewohnten Umwelt aus. Im Weltraum dagegen stoßen wir auf Größenordnungen, die weit über unsere Vorstellungen hinausgehen und für die wir andere Einheiten benötigen. Als Grundgröße betrachten wir das Licht, das sich mit einer Geschwindigkeit von ca. 300 000 Kilometern pro Sekunde fortbewegt. Bei dieser Geschwindigkeit umkreist es in einer Sekunde locker die Erde über siebenmal. Licht besteht aus Teilchen, den Photonen. Photonen legen also 300 000 Kilometer pro Sekunde zurück, in einer Woche gar $1{,}8 \cdot 10^{11}$ Kilometer. Die Strecke, die Photonen in einem Jahr zurücklegen, beträgt $9{,}4 \cdot 10^{12}$ Kilometer, also

9 400 000 000 000 Kilometer.

Diese Strecke bezeichnet man als ein Lichtjahr. Der nächste Stern, *Proxima Centauri*, ist etwa vier Lichtjahre von uns entfernt. Wenn ich ihn heute sehe, wurde sein Licht vor vier Jahren ausgesandt. Manche Sterne sind Zehntausende von Lichtjahren entfernt. Ihr Licht, das wir heute sehen, wurde also ausgesandt, als es noch keine Menschen auf unserer Erde gab. Die Milchstraße, unsere Heimatgalaxie, hat einen Durchmesser von über 100 000 Lichtjahren. Es gibt Galaxien, die Milliarden Lichtjahre von uns entfernt sind.

Die riesigen Entfernungen im Weltall haben die Astronomen dazu veranlasst, eine weitere Längeneinheit einzuführen: das Parsec. Ein Parsec ist die Entfernung, aus der der mittlere Durchmesser der Erdbahn um die Sonne als Länge einer Bogensekunde erscheint. Dabei ist eine Bogensekunde 1/3600 Grad, das sind 0,000278 Grad. Anders formuliert: Würde ich im Weltraum die Erdbahn aus weiter Entfernung als winzige Kugel sehen mit einem Durchmesser von einer Bogensekunde, bin ich 1 Parsec von der Erde entfernt. Es gilt:

$$1 \text{ Parsec} = 3{,}2616 \text{ Lichtjahre} = 3{,}0857 \cdot 10^{16} \text{ Meter.}$$

Laufen wir entlang einer Linie (Geraden), bewegen wir uns in Richtung einer Dimension. Die Ebene besitzt zwei Dimensionen, der Raum drei. Die Physiker rechnen ohne Schwierigkeiten mit vierdimensionalen Räumen, wobei die Rechnung sich zwar einfach durchführen lässt, ihre Schritte und das Ergebnis aber nicht vorstellbar sind. Die vierte Dimension ist hier üblicherweise die Zeit. Mathematiker rechnen dabei übrigens mit sieben, acht oder gar hundert dimensionalen Räumen. Das ist an sich nicht kompliziert; die Schwierigkeit besteht nur darin, dass unsere Vorstellungskraft sich auf den dreidimensionalen Raum, in dem wir leben, beschränkt.

Bei der Betrachtung der Zeit als vierte Dimension muss eine Unterscheidung vorgenommen werden: Im Raum können wir uns beliebig hin- und zurückbewegen. Ein Zurück in der Zeit gibt es nicht. Diese verläuft unerbittlich von Sekunde zu Sekunde vorwärts, und wir laufen unweigerlich mit. Dabei tickt im Kosmos nicht irgendwo eine globale Uhr, die die Zeit vorgibt: Albert Einstein entdeckte, dass die Zeit relativ ist. Was bedeutet das? Wenn Sie eine Rakete sehen, die an Ihnen vorbeifliegt, dann verläuft die Zeit in der Rakete langsamer als auf Ihrer Armbanduhr. Je schneller sich jemand bewegt, umso langsamer verläuft für ihn die Zeit. Dabei sind die Zeitdifferenzen (die Physiker sprechen von Zeitdilatation) bei der Geschwindigkeit, an die wir gewöhnt sind, äußerst gering. Bei Lichtgeschwindigkeit allerdings – falls man diese erreichen könnte – bleibt die Zeit stehen.

Tabelle 1: Längenmaße

Bezeichnung	**Einheit**	**In Metern**	**Umrechnung**	**Anwendung in:**
Yottameter	Ym	10^{24}		
Zettameter	Zm	10^{21}		
Exameter	Em	11^{18}		
Petameter	Pm	10^{15}		
Terameter	Tm	10^{12}		
Gigameter	Gm	10^{9}	1 000 000 km	
Megameter	Mm	10^{6}	1000 km	Ozeanologie
Kilometer	Km	10^{3}	1000 m	
Hektometer	Hm	10^{2}	100 m	Artillerie, Marine
Dekameter	Dam	10^{1}	10 m	
Meter	M	10^{0}		Grundmaß
Dezimeter	Dm	10^{-1}	10 cm	
Zentimeter	Cm	10^{-2}		
Millimeter	Mm	10^{-3}	0,001 m	
Mikrometer	Mm	10^{-6}	0,001 mm	
Nanometer	Nm	10^{-9}		Informatik
Ångström	Å	10^{-10}	100 pm	Atomphysik
Pikometer	Pm	10^{-12}		
Femtometer	Fm	10^{-15}		Teilchenphysik
Attometer	Am	10^{-18}		
Zeptometer	Zm	10^{-21}		
Yoctometer	Ym	10^{-24}		

Tabelle 2: Längenmaße in der Kosmologie

Lichtjahr	LJ	$9{,}5 \cdot 10^{15}$ m
Parsec	pc	$3{,}0857 \cdot 10^{16}$ m
Megaparsec	Mpc	10^{6} pc

Gibt es Systeme ohne Zeit und können diese etwa als dasjenige begriffen werden, was die verschiedenen Religionen «Ewigkeit» nennen? Ludwig Wittgenstein schreibt hierzu: «Wenn man unter Ewigkeit nicht unendliche Zeitdauer versteht, sondern Unzeitlichkeit, dann lebt der ewig, der in der Gegenwart lebt.»

[…]