

6. Auflage

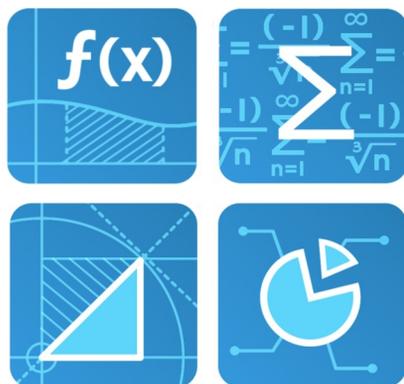
Analysis
Vektor
Stochastik

Mathematik Oberstufe

Crash-Kurs

Florian Rosar

Simon Hubertus
Dennis Meisberger
Nadine Hoffmann



All-in-One
Edition

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische
Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar

© 2016 Florian Rosar
Herstellung und Verlag:
BoD – [Books on Demand](#), Norderstedt

ISBN: 9783738677171

Vorwort

Um die Schülerinnen und Schüler der Gymnasialen Oberstufe erfolgreich auf das Mathematikabitur vorzubereiten, haben sich einige Studenten zusammengefunden, um dieses Buch anzufertigen. Um den Unterrichtsstoff im Fach Mathematik, basierend auf dem saarländischen Lehrplan, vor dem Abitur noch einmal intensiv durcharbeiten zu können, soll dieses Buch eine übersichtliche Unterstützung bieten. Sowohl für Schülerinnen und Schüler des Grundkurses, als auch des Erweiterungskurses, wird hier ein Repertoire an Theorie, Beispielen und vielfältigen Aufgaben zusammengefasst. Damit jedoch jeder die für sich relevanten Aufgaben bearbeiten kann, wurden die Übungen für die Erweiterungskurse als solche kenntlich gemacht. Mit Hilfe von einfachen Erklärungen und zahlreichen Beispielen möchten wir den Schülerinnen und Schülern die Mathematik verständlich näher bringen.



Florian Rosar

Doppelstudium
Medizin und Physik
an der Johannes
Gutenberg-
Universität
Mainz



Simon Hubertus

Studium der Physik
an der Rheinisch-
Westfälischen
Technischen
Hochschule Aachen



Dennis Meisberger

Studium der
Mathematik und
Physik auf Lehramt
an der Universität
des Saarlandes



Nadine Hoffmann

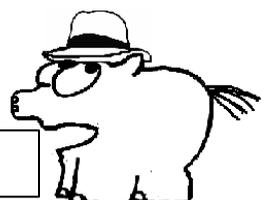
Studium der
Mathematik und
Germanistik auf
Lehramt an der
Universität des
Saarlandes

Neuerungen der Ausgabe 2015:

- Überarbeitung der Themen und erweiterte Erklärungen
- 22 Aufgabenblätter zu den drei Hauptthemen
- Von uns aufgestellte Probeabiture

**Und ohne mich geht
es natürlich nicht!!**

Pythagoras!



Lösungen zu den Übungsblättern online auf www.abituria-nachhilfe.de

0. Grundlagen

Seite 01 - 10

0.1 Binomische Formeln und quadratische Gleichungen

Seite 01 - 03

0.2 Lösen von Gleichungen mit einem Grad > 2 (x^3, x^4, x^5, \dots)

Seite 04

0.3 Lösen von Gleichungssystemen

Seite 05 - 07

04. Umkehrfunktionen

Seite 07 - 08

05. Mengenschreibweisen

Seite 09

1. Kurvendiskussion

Seite 11 - 46

1.1 Ableitungen

Seite 11 - 12

1.2 Funktionen diskutieren

Seite 14 - 29

1.2.1 Definitionsmenge

Seite 14

1.2.2 Symmetrie

Seite 14 - 15

1.2.3 Ableitungen

Seite 15

1.2.4 Nullstellen

Seite 15 - 16

1.2.5 Extremstellen

Seite 16 - 17

1.2.6 Wendepunkte

Seite 19 - 20

1.2.7 Monotonie

Seite 20 - 21

1.2.8 Krümmung

Seite 22 - 23

1.2.9 Polstellen

Seite 23 - 24

1.2.10 Grenzwerte

Seite 24 - 26

1.2.11 Asymptote

Seite 27 - 28

1.2.12 Der Graph

Seite 28

1.3 Exponential- und Logarithmusfunktion

Seite 30 - 33

1.3.1 Die e-Funktion

Seite 31

1.3.2 Der natürliche Logarithmus

Seite 31 - 32

1.4 Extras

Seite 34 - 46

1.4.1 Tangenten und Normalen

Seite 34 - 37

1.4.2 Steigungs- und Schnittwinkel

Seite 37

1.4.3 Ortskurve

Seite 38

1.4.4 Extremwertaufgaben

Seite 39 - 40

1.4.5 Erstellen von Funktionsgleichungen

Seite 42 - 45

2. Integralrechnung

Seite 47 - 66

2.1 Stammfunktionen	Seite 47 - 53
2.2 Flächeninhalt unter Kurven	Seite 53 - 54
2.3 Flächeninhalt zwischen Kurven	Seite 55 - 56
2.4 Integralfunktionen	Seite 57 - 58
2.5 Mittelwert einer Funktion	Seite 58 - 59
2.6 Rotationsvolumen	Seite 63 - 65

3. Beweisverfahren

3.1 Vollständige Induktion	Seite 67 - 72
-----------------------------------	---------------

4. Vektorrechnung

Seite 73 - 114

4.1 Was ist ein Vektor?	Seite 73 - 74
4.2 Eigenschaften von Vektoren	Seite 74 - 77
4.2.1 Betrag	Seite 74
4.2.2 Normierte Vektoren	Seite 75
4.2.3 Addition und Subtraktion	Seite 75
4.2.4 S-Multiplikation	Seite 76
4.2.5 Skalarprodukt	Seite 76
4.2.6 Kreuzprodukt	Seite 77
4.3 Extras	Seite 78 - 81
4.3.1 Kollinearität	Seite 78
4.3.2 Linearkombination von Vektoren	Seite 78 - 80
4.3.3 Orthogonalität	Seite 80
4.3.4 Punkt-, Flächen- und Volumenberechnung	Seite 81
4.4 Aufstellen von Geradengleichungen	Seite 83 - 87
4.4.1 Allgemeine Punktrichtungsgleichung	Seite 83 - 84
4.4.2 Parameterfreie Geradengleichung	Seite 85 - 87
4.5 Aufstellen von Ebenengleichungen	Seite 87 - 93
4.5.1 Allgemeine Parametergleichung	Seite 88
4.5.2 Parameterfreie Ebenengleichung	Seite 89 - 91
4.5.2.1 Normalenform	Seite 89
4.5.2.2 Koordinatenform	Seite 90
4.5.2.3 Hessesche Normalenform	Seite 90 - 91
4.5.3 Umwandeln von Ebenengleichungen	Seite 92 - 93
4.6 Lagebeziehungen	Seite 94 - 99
4.6.1 Zwei Geraden	Seite 94 - 95

4.6.2 Zwei Ebenen	Seite 96 - 97
4.6.3 Gerade und Ebene	Seite 98 - 99
4.6.4 Schnittwinkel	Seite 99
4.7 Abstände	Seite 100 - 104
4.7.1 Zwei Punkte	Seite 100
4.7.2 Parallele Ebenen, Ebene und parallele Gerade bzw. Punkt und Ebene	Seite 100
4.7.3 Punkt und Gerade	Seite 101 - 102
4.7.4 Parallele Geraden	Seite 102 - 103
4.7.5 Windschiefe Geraden	Seite 103
4.7.6 Die Lotfußpunktmethod	Seite 104
4.8 Projektion und Spiegelung	Seite 104 - 110
4.8.1 Punkt an Punkt	Seite 104 - 105
4.8.2 Punkt an Gerade	Seite 105 - 106
4.8.3 Punkt an Ebene	Seite 106 - 107
4.8.4 Gerade an Ebene	Seite 108 - 109
4.8.5 Projektionsgerade - Spiegelung einer Geraden an einer nichtparallelen Ebene	Seite 109 - 110

5. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Seite 115 - 141

5.1 Venn-Diagramme	Seite 115 - 116
5.2 Vier-Feldertafel	Seite 116 - 117
5.3 Regel von de Morgan /Axiome von Kolmogorov	Seite 117
5.4 Unvereinbarkeit	Seite 118
5.5 Baumdiagramme und Pfadregeln	Seite 119 - 120
5.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit	Seite 120 - 121
5.7 Unabhängigkeit von 2 Ereignissen	Seite 121 - 122
5.8 Kombinatorik	Seite 123 - 130
5.9 Bernoulli-Wahrscheinlichkeit	Seite 131 - 137
5.10 Zufallsgröße, Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	Seite 138 - 141

6. Probeabitur

Seite 142 - 148

6.1 Probeabitur 2014 G-Kurs	Seite 142 - 145
6.2 Probeabitur 2014 E-Kurs	Seite 146 - 148

0. Grundlagen

Da die Grundlagen aus Klassenstufe 5 - 10 sehr wichtig sind und die Themen der Oberstufe auf ihnen aufbauen, wollen wir hier kurz die wichtigsten Dinge wiederholen.

0.1 Binomische Formeln und quadratische Gleichungen

a) Binomische Formeln

Eine wichtige Grundlage ist die Kenntnis der drei binomischen Formeln. Diese solltet ihr euch immer wieder in Erinnerung rufen:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

b) Lösen von quadratischen Gleichungen

Dieses Thema solltet ihr für euer Abitur im Schlaf beherrschen. Wir zeigen es euch an folgendem Beispiel:

$$2x^2 + 10x + 10 = -2$$

Was mache ich immer als Erstes?

- 1) Alles auf einen Teil der Seite bringen! (so dass auf der einen Seite 0 steht)
- 2) Durch die Zahl vor dem x^2 teilen (für die Form $x^2 + px + q = 0$)

Hier also: $1) 2x^2 + 10x + 12 = 0$

$$2) x^2 + 5x + 6 = 0$$

Welche Möglichkeiten habe ich um eine solche Gleichung zu lösen?

- quadratische Ergänzung
- pq-Formel
- Satz von Vieta

Diese drei Verfahren werden wir im Folgenden nochmal kurz erklären.

Quadratische Ergänzung

$$\text{Ausgehend von } x^2 + 5x + 6 = 0$$

Schritt 1: Immer alles mit x auf eine Seite bringen und den „Rest“ auf die andere Seite

$$x^2 + 5x = -6$$

Schritt 2: Auf beiden Seiten die Hälfte des Vorfaktors von x (hier = 5) zum Quadrat addieren.

Ihr fragt euch nach dem Sinn? Dies ist ganz einfach: Auf der Seite steht dann automatisch eine binomische Formel.

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0,25$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = 0,25$$

Schritt 3: Nun einfach die Wurzel ziehen und nach x auflösen.

$$\left|x + \frac{5}{2}\right| = 0,50$$

Vorsicht: Beim Wurzelziehen immer Betragsstriche oder \pm setzen. (Wenn man Betragsstriche setzt, kann auch bei Ungleichungen nichts schiefgehen)

$$x + \frac{5}{2} = +0,5 \quad \text{oder} \quad x + \frac{5}{2} = -0,5$$

$$x = -2 \quad \text{oder} \quad x = -3$$

pq-Formel

Bei jeder quadratischen Gleichung (wenn man sie auf die Standardform gebracht hat) kann man die pq-Formel anwenden:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Vorsicht: Ist das Ergebnis unter der Wurzel (der sogenannte Radikant) negativ, so hat die Gleichung keine reelle Lösung!

In unserem Beispiel gilt also:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$

$$x = -2 \text{ oder } x = -3$$

Satz von Vieta

Dies ist die schnellste Variante eine quadratische Gleichung zu lösen. Sie ist aber nur bei einfachen Gleichungen zu empfehlen.

Quadratische Gleichungen lassen sich folgendermaßen umformen:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + \mathcal{A})(x + \mathcal{B})$$

Die zwei gesuchten Zahlen \mathcal{A} und \mathcal{B} hängen wie folgt mit der ursprünglichen Gleichung zusammen:

Summe: $\mathcal{A} + \mathcal{B} = 5$

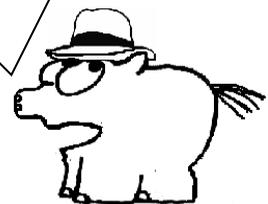
-> sprich: $\mathcal{A} = 2$ und $\mathcal{B} = 3$

Produkt: $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 6$

Merkhilfe:

Schnitzel mit Pommes

Die erste Zahl ist die Summe,
die zweite Zahl das Produkt



Es gilt also: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3) = 0$

Merke: Ein Produkt ist dann immer 0, wenn eines seiner Faktoren 0 ist.

$$\rightarrow x = -2 \text{ oder } x = -3$$

0.2 Lösen von Gleichungen mit einem Grad > 2 (x^3, x^4, x^5, \dots)

Hier unterscheidet man zwei Fälle:

a) Gleichungen ohne konstantes Glied:

$$2x^3 + 6x^2 + 4x = 0$$

Solche Gleichungen lassen sich einfach lösen durch: (x)Ausklammern

$$\begin{aligned} \rightarrow 2x \cdot (x^2 + 3x + 2) &= 0 \\ \rightarrow x = 0 \text{ oder } (x = -1, x = -2) \end{aligned}$$

b) Gleichungen mit konstantem Glied:

$$x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = 0$$

Solche Gleichungen löst man immer durch: Polynomdivision

Nullstelle raten durch ausprobieren: $x_1 = -1$ | Teiler von 9

Polynomdivision: $(x^3 + 7x^2 + 15x + 9) \div (x + 1) = x^2 + 6x + 9$

$$\begin{array}{r} x^3 + 7x^2 + 15x + 9 \\ -(x^3 + x^2) \\ \hline 6x^2 + 15x + 9 \\ -(6x^2 + 6x) \\ \hline 9x + 9 \\ -(9x + 9) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x + 1) \cdot (x^2 + 6x + 9) = (x + 1) \cdot (x + 3)^2$$

Nullstellen: $x_1 = -1$ und $x_2 = -3$

Die Nullstelle, die man errät, ist ein Teiler der letzten Zahl.

Polynomdivision immer mit

$$: (x - \text{geratene Zahl})$$

Hier also:

$$(x - (-1)) = (x + 1)$$



0.3 Lösen von Gleichungssystemen

Dieses Thema ist bei den meisten von euch schon einige Jahre her, sollte aber auch im Abitur stets parat sein (z.B. bei dem Thema „Erstellen von Funktionsgleichungen“ oder „Linearkombination von Vektoren“).

Welche Verfahren gibt es um allgemein ein Gleichungssystem lösen?

- Additionsverfahren (durch addieren 2er Gleichungen eine Variable eliminieren)
- Subtraktionsverfahren (durch subtrahieren 2er Gleichungen eine Variable eliminieren)
- Einsetzungsverfahren (eine Gleichung nach einer Variable auflösen und in die 2. Gleichung einsetzen)
- Gleichsetzungsverfahren (zwei Gleichungen gleichsetzen und auflösen)
- Gauß-Algorithmus (siehe unten)

Es gibt auch das

- Divisionsverfahren (dies ist aber bei linearen Gleichungen unbrauchbar und wird im Abitur nur bei e -Funktionen wichtig.)

Da die ersten vier Verfahren selbsterklärend sind, wollen wir hier nur den Gauß-Algorithmus erläutern.

Der Gauß-Algorithmus

Dies ist ein wichtiges und einfaches Verfahren. Das Verfahren läuft immer nach dem gleichen Schema ab und es ist leicht zu lösen. (Es ist eine Kombination aus Additions- und Subtraktionsverfahren)

Beispiel:

$$1x + 1y + 1z = 6$$

$$1x + 2y - 2z = 5$$

$$1x + 3y + 3z = 12$$

Beim Gauß-Algorithmus lässt man nun alle Variablen weg und schreibt alle Vorfaktoren in eine Art Matrix. Der senkrechte Strich symbolisiert das Gleichheitszeichen.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 12 \end{array}$$

Der Sinn des Gauß-AL. ist es, mit Hilfe von einfachen Rechnungen (das kleine 1x1 aus der Grundschule reicht oft aus) eine solche Matrix zu lösen.

Zuerst müssen wir noch klären, wie man in so einer Matrix rechnen darf:

- Man darf nur ganze Reihen addieren oder subtrahieren (nicht nur einzelne Zahlen).
- Man darf ganze Reihen mit einer beliebigen Zahl multiplizieren.
- Man darf ganze Reihen kürzen.

Das Grundprinzip beim Gauß-AL. ist:

Alle Zahlen unter der Diagonalen sollen durch Addition/Subtraktion 0 werden.

Man kann immer nach derselben Reihenfolge vorgehen:

Zuerst versuchen, die Zahlen unter der Diagonalen in der ersten Spalte, dann die Zahl unter der Diagonalen in der zweiten Spalte gleich 0 zu bekommen.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ II - I \\ III - I \end{array}$$

Schritt 1: hier: *Reihe II – Reihe I und Reihe III – Reihe I*

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{array} \quad III - 2 \cdot II$$

Schritt 2: hier: *Reihe III – 2 · Reihe II*

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}$$

Nun ist man schon fertig, da jede Zahl unter der Diagonalen 0 ist.

Jetzt muss man nur die Variablen von unten nach oben wieder dazuschreiben und auflösen:

Aus der untersten Reihe sieht man: $8z = 8 \rightarrow z = 1$

Aus der mittleren Reihe sieht man: $1y - 3z = -1$, da wir schon wissen dass $z=1$ ist gilt: $\rightarrow y = 2$

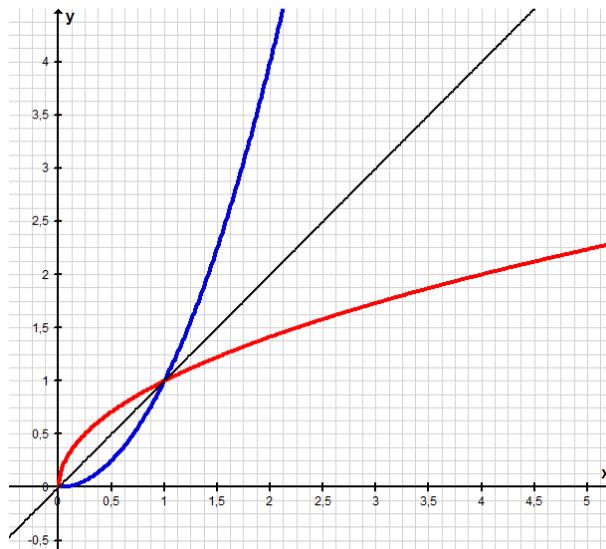
Aus der obersten Reihe sieht man: $1x + 1y + 1z = 6$, mit $z=1$ und $y=2$ gilt:
 $\rightarrow x = 3$

Ergebnis: $x = 3, \quad y = 2, \quad z = 1$

0.4 Umkehrfunktionen

Was ist überhaupt eine Umkehrfunktion?

Eine Umkehrfunktion ist eine Funktion, die eine Abbildung umkehrt. Geometrisch betrachtet erhält man die Umkehrfunktion wenn man die eigentliche Funktion an der ersten Winkelhalbierenden spiegelt. Rechnerisch erhält man die Umkehrfunktion, wenn man x mit y tauscht und dann wieder nach y auflöst.



Dies ist ein Thema, welches Schüler täglich benutzen, ohne es überhaupt explizit zu wissen, dass man es benutzt. Jetzt fragt ihr euch bestimmt: „Wo benutze ich denn immer eine Umkehrfunktion?“

Ganz einfach: z.B. beim Wurzelziehen. Ich benutze die $\sqrt{\quad}$ um ein Quadrat zu lösen.

$$x^2 = 2 \rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{2} \rightarrow |x| = \sqrt{2}$$

Habt ihr euch schon mal gefragt, warum ihr $\sin(x)$ - Gleichungen immer mit $\sin^{-1}(x)$ löst?

Genau, weil $\sin^{-1}(x)$ (wörtlich „Arkussinus“) die Umkehrfunktion von $\sin(x)$ ist.

$$\sin(x) = 0,5 \quad \rightarrow \quad \sin^{-1}(\sin(x)) = \sin^{-1}(0,5) \quad \rightarrow \quad x = \sin^{-1}(0,5)$$

Sind Umkehrfunktion und Funktion ineinander verknüpft ($\sqrt{x^2}$, $\sin^{-1}(\sin(x))$, $e^{\ln(x)}$, ...), so lösen sie sich gegenseitig auf.

Wichtige Umkehrfunktionen im Abitur:

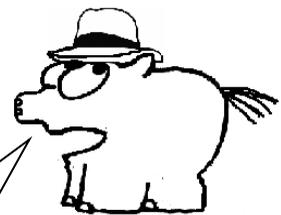
x^2	x^n	\sin	\cos	\tan	e^x	10^x
\sqrt{x}	$\sqrt[n]{x}$	\sin^{-1}	\cos^{-1}	\tan^{-1}	$\ln(x)$	$\log(x)$

In der Tabelle sieht man auch was der Unterschied zwischen $\ln(x)$ und $\log(x)$ ist.

- $\log(x)$ ist die Umkehrfunktion zu 10^x , deshalb nennt man ihn auch „Logarithmus zu Basis 10“ bzw. „dekadischer Logarithmus“.
- $\ln(x)$ ist die Umkehrfunktion zu e^x , deshalb nennt man ihn auch „Logarithmus zur Basis e “ bzw. „natürlicher Logarithmus“.

Weiterhin gilt:

- Jede streng monotone Funktion besitzt eine Umkehrfunktion.
- Jede über einem Intervall I stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ ist umkehrbar.



Eine Funktion heißt **stetig**, wenn man den dazugehörigen Graphen von einem Intervallpunkt bis zum anderen zeichnen kann, ohne den Stift dabei absetzen zu müssen.

Eine Funktion ist **differenzierbar**, wenn die Ableitung an jedem Punkt des Intervalls existiert. Anschaulich lässt sich eine differenzierbare Funktion ohne „Knick“ zeichnen.

Eine Funktion ist **stetig differenzierbar**, wenn ihre Ableitungsfunktion stetig ist.

0.5 Mengenschreibweisen

Viele Schülerinnen und Schüler bringen oft die Begriffe reelle, rationale, irrationale und natürliche Zahlen durcheinander. Deshalb hier nochmal eine kurze Wiederholung:

Natürliche Zahlen \mathbb{N} : z.B. 1, 2, 3, 4,... bedeutet: Alle positiven ganzen Zahlen

Ganze Zahlen \mathbb{Z} : z.B. -5, -1, 3, 9 bedeutet: Alle ganzen Zahlen

Rationale Zahlen \mathbb{Q} : z.B. $\frac{4}{7}, \frac{132}{91}, \frac{3}{3}$ bedeutet: Alle Zahlen, die sich durch einen Bruch aus zwei ganzen Zahlen schreiben lassen

Reelle Zahlen \mathbb{R} : z.B. $\sqrt{3}, \pi, \frac{\sqrt{5}}{4}$ bedeutet: Alle Zahlen, außer Wurzeln von negativen Zahlen

spezielle Schreibweisen:

\	: „ohne“	z.B. $\mathbb{N} \setminus \{3\}$	<u>bedeutet</u> : Alle natürlichen Zahlen ohne 3
*	: „ohne 0“	z.B. \mathbb{R}^*	<u>bedeutet</u> : Alle reellen Zahlen ohne 0
+	: „nur positive“	z.B. \mathbb{R}_+	<u>bedeutet</u> : Alle positiven reellen Zahlen
-	: „nur negative“	z.B. \mathbb{R}_-	<u>bedeutet</u> : Alle negativen reellen Zahlen

Mengenschreibweise:

geschweifte Klammern $\{ \}$ = einzelne Elemente, Zahlen

z.B. $\{2, 4\}$: die Element 2 und 4

eckige Klammern $[]$ = „von bis“

z.B. $[2, 4]$: von 2 bis 4 (2 und 4 eingeschlossen)

$]2, 4[$: von 2 bis 4 (2 und 4 ausgeschlossen)

Die Klammersetzung ist in der Kurvendiskussion sehr wichtig.



Aufgabenblatt 0: Grundlagen

Aufgabe 1:

Löse folgende Quadratische Gleichungen.

- a) $10x - 4 \cdot (-3x + 1) - 2(x + 23) \cdot (x + 1) = 6$
- b) $x^2 + 2x = 0$
- c) $-x^2 + x = -\frac{1}{2}$
- d) $3x^2 + 12x + 3 = 0$
- e) $4x^2 - 16 = 0$

Aufgabe 2:

Löse folgendes Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

$$7x + 3y - 5z = -12$$

$$-x - 2y + 4z = 5$$

$$-4x + y - 3z = 1$$

Aufgabe 3:

Führe folgende Polynomdivision durch.

- a) $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 3)$
- b) $(2x^3 - 14x - 12) : (x + 2)$
- c) $(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 6) : (x - 3)$

Aufgabe 4:

Bilde die Umkehrfunktion zu den gegebenen Funktionen. Überlege in jedem Fall, ob es überhaupt eine Umkehrfunktion gibt.

- a) $y = 2x + 1 \quad x \in [3; 9]$
- b) $y = 3x - 5 \quad x \in \mathbb{R}$
- c) $y = x^2 + 1 \quad x \geq 1, x \in \mathbb{R}$
- d) $y = e^x \quad x > 0, x \in \mathbb{R}$