Analysis
Vektor
Stochastik

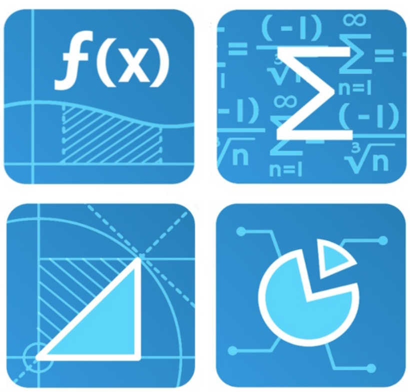
6.Auflage

Mathematik Oberstufe

Crash-Kurs

Florian Rosar

Simon Hubertus
Dennis Meisberger
Nadine Hoffmann



All-in-One Edition

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische
Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar

Herstellung und Verlag:
BoD – Books on Demand, Norderstedt

ISBN: 9783738677171

Vorwort

Um die Schülerinnen und Schüler der Gymnasialen Oberstufe erfolgreich auf das Mathematikabitur vorzubereiten, haben sich einige Studenten zusammengefunden, um dieses Buch anzufertigen. Um den Unterrichtsstoff im Fach Mathematik, basierend auf dem saarländischen Lehrplan, vor dem Abitur noch einmal intensiv durcharbeiten zu können, soll dieses Buch eine übersichtliche Unterstützung bieten. Sowohl für Schülerinnen und Schüler des Grundkurses, als auch des Erweiterungskurses, wird hier ein Repertoire an Theorie, Beispielen und vielfältigen Aufgaben zusammengefasst. Damit jedoch jeder die für sich relevanten Aufgaben bearbeiten kann, wurden die Übungen für die Erweiterungskurse als solche kenntlich gemacht. Mit Hilfe von einfachen Erklärungen und zahlreichen Beispielen möchten wir den Schülerinnen und Schülern die Mathematik verständlich näher bringen.

Florian Rosar

Doppelstudium Medizin und Physik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Simon Hubertus

Studium der Physik an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

Dennis Meisberger

Studium der Mathematik und Physik auf Lehramt an der Universität des Saarlandes

Nadine Hoffmann

Studium der Mathematik und Germanistik auf Lehramt an der Universität des Saarlandes

<u>Neuerungen der Ausgabe 2015:</u>

- Überarbeitung der Themen und erweiterte Erklärungen
- 22 Aufgabenblätter zu den drei Hauptthemen
- Von uns aufgestellte Probeabiture

Lösungen zu den Übungsblättern online auf www.abituria-nachhilfe.de

0. Grundlagen

Da die Grundlagen aus Klassenstufe 5 - 10 sehr wichtig sind und die Themen der Oberstufe auf ihnen aufbauen, wollen wir hier kurz die wichtigsten Dinge wiederholen.

0.1 Binomische Formeln und quadratische Gleichungen

a) Binomische Formeln

Eine wichtige Grundlage ist die Kenntnis der drei binomischen Formeln. Diese solltet ihr euch immer wieder in Erinnerung rufen:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

b) Lösen von quadratischen Gleichungen

Dieses Thema solltet ihr für euer Abitur im Schlaf beherrschen. Wir zeigen es euch an folgendem Beispiel:

$$2x^2 + 10x + 10 = -2$$

Was mache ich immer als Erstes?

1) Alles auf einen Teil der Seite bringen! (so dass auf der einen Seite 0 steht)
2) Durch die Zahl vor dem x^2 teilen (für die Form $x^2 + px + q = 0$)

Hier also: 1) $2x^2 + 10x + 12 = 0$

2) $x^2 + 5x + 6 = 0$

Welche Möglichkeiten habe ich um eine solche Gleichung zu lösen?

- quadratische Ergänzung
- pq-Formel
- Satz von Vieta

Diese drei Verfahren werden wir im Folgenden nochmal kurz erklären.

Quadratische Ergänzung

Ausgehend von $x^2 + 5x + 6 = 0$

Schritt 1: Immer alles mit x auf eine Seite bringen und den „Rest" auf die andere Seite

$$x^2 + 5x = -6$$

Schritt 2: Auf beiden Seiten die Hälfte des Vorfaktors von x (hier = 5) zum Quadrat addieren.
Ihr fragt euch nach dem Sinn? Dies ist ganz einfach: Auf der Seite steht dann automatisch eine binomische Formel.

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0{,}25$$

$$(x + \frac{5}{2})^2 = 0{,}25$$

Schritt 3: Nun einfach die Wurzel ziehen und nach x auflösen.

$$\left|(x + \tfrac{5}{2})\right| = 0{,}50$$

Vorsicht: Beim Wurzelziehen immer Betragsstriche oder $\pm$ setzen. (Wenn man Betragsstriche setzt, kann auch bei Ungleichungen nichts schiefgehen)

$$x + \frac{5}{2} = +0{,}5 \quad oder \quad x + \frac{5}{2} = -0{,}5$$

$$x = -2 \quad oder \quad x = -3$$

pq-Formel

Bei jeder quadratischen Gleichung (wenn man sie auf die Standardform gebracht hat) kann man die pq-Formel anwenden:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Vorsicht: Ist das Ergebnis unter der Wurzel (der sogenannte Radikant) negativ, so hat die Gleichung keine reelle Lösung!

In unserem Beispiel gilt also:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$

$$x = -2 \quad oder \quad x = -3$$

Satz von Vieta

Dies ist die schnellste Variante eine quadratische Gleichung zu lösen. Sie ist aber nur bei einfachen Gleichungen zu empfehlen.

Quadratische Gleichungen lassen sich folgendermaßen umformen:

$x^2 + 5x + 6 = (x + \mathcal{A})(x + \mathcal{B})$

Die zwei gesuchten Zahlen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hängen wie folgt mit der ursprünglichen Gleichung zusammen:

Summe: $\mathcal{A} + \mathcal{B} = 5$

Produkt: $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 6$

-> sprich: $\mathcal{A} = 2 \, und \, \mathcal{B} = 3$

Merkhilfe:

Schnitzel mit Pommes

Die erste Zahl ist die Summe, die zweite Zahl das Produkt

Es gilt also: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3) = 0$

Merke: Ein Produkt ist dann immer 0, wenn eines seiner Faktoren 0 ist.

$$\rightarrow x = -2 \; oder \; x = -3$$

0.2 Lösen von Gleichungen mit einem Grad > 2 ($x^3, x^4, x^5, ..$)

Hier unterscheidet man zwei Fälle:

a) <u>Gleichungen ohne konstantes Glied:</u>

$$2x^3 + 6x^2 + 4x = 0$$

Solche Gleichungen lassen sich einfach lösen durch: $\boxed{(x)\,Ausklammern}$

$$\rightarrow \quad 2x \cdot (x^2 + 3x + 2) = 0$$
$$\rightarrow x = 0 \quad oder \quad (x = -1\,, x = -2)$$

b) <u>Gleichungen mit konstantem Glied:</u>

$$x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = 0$$

Solche Gleichungen löst man immer durch: $\boxed{Polynomdivision}$

Nullstelle raten durch ausprobieren: $x_1 = -1$ | Teiler von 9

<u>Polynomdivision:</u> $(x^3 + 7x^2 + 15x + 9) \div (x + 1) = x^2 + 6x + 9$

$$\begin{array}{l} -(x^3 + x^2) \\ \hline \quad 6x^2 + 15x \\ \quad -(6x^2 + 6x) \\ \hline \qquad 9x + 9 \\ \qquad -(9x + 9) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Die Nullstelle, die man errät, ist ein Teiler der letzten Zahl.

$$f(x) = (x + 1) \cdot (x^2 + 6x + 9) = (x + 1) \cdot (x + 3)^2$$

Nullstellen: $x_1 = -1 \quad und \quad x_2 = -3$

Polynomdivision immer mit

$$:(x - geratene\ Zahl)$$

Hier also:

$$\big(x - (-1)\big) = (x + 1)$$

0.3 Lösen von Gleichungssystemen

Dieses Thema ist bei den meisten von euch schon einige Jahre her, sollte aber auch im Abitur stets parat sein (z.B. bei dem Thema „Erstellen von Funktionsgleichungen“ oder „Linearkombination von Vektoren“).

Welche Verfahren gibt es um allgemein ein Gleichungssystem lösen?

- Additionsverfahren (durch addieren 2er Gleichungen eine Variable eliminieren)
- Subtraktionsverfahren (durch subtrahieren 2er Gleichungen eine Variable eliminieren)
- Einsetzungsverfahren (eine Gleichung nach einer Variable auflösen und in die 2. Gleichung einsetzten)
- Gleichsetzungsverfahren (zwei Gleichungen gleichsetzten und auflösen)
- Gauß-Algorithmus (siehe unten)

Es gibt auch das

- Divisionsverfahren (dies ist aber bei linearen Gleichungen unbrauchbar und wird im Abitur nur bei e-Funktionen wichtig.)

Da die ersten vier Verfahren selbsterklärend sind, wollen wir hier nur den Gauß-Algorithmus erläutern.

<u>Der Gauß-Algorithmus</u>

Dies ist ein wichtiges und einfaches Verfahren. Das Verfahren läuft immer nach dem gleichen Schema ab und es ist leicht zu lösen. (Es ist eine Kombination aus Additions- und Subtraktionsverfahren)

Beispiel:

$$\begin{aligned} 1x + 1y + 1z &= 6 \\ 1x + 2y - 2z &= 5 \\ 1x + 3y + 3z &= 12 \end{aligned}$$

Beim Gauß-Algorithmus lässt man nun alle Variablen weg und schreibt alle Vorfaktoren in eine Art Matrix. Der senkrechte Strich symbolisiert das Gleichheitszeichen.

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 12 \end{array}\right.$$

Der Sinn des Gauß-Al. ist es, mit Hilfe von einfachen Rechnungen (das kleine 1x1 aus der Grundschule reicht oft aus) eine solche Matrix zu lösen.

Zuerst müssen wir noch klären, wie man in so einer Matrix rechnen darf:

- Man darf nur ganze Reihen addieren oder subtrahieren (nicht nur einzelne Zahlen).
- Man darf ganze Reihen mit einer beliebigen Zahl multiplizieren.
- Man darf ganze Reihen kürzen.

Das Grundprinzip beim Gauß-Al. ist:

Alle Zahlen unter der Diagonalen sollen durch Addition/Subtraktion 0 werden.

Man kann immer nach derselben Reihenfolge vorgehen:

Zuerst versuchen, die Zahlen unter der Diagonalen in der ersten Spalte, dann die Zahl unter der Diagonalen in der zweiten Spalte gleich 0 zu bekommen.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{c} II - I \\ III - I \end{array}$$

Schritt 1: hier: $Reihe\ II - Reihe\ I$ und $Reihe\ III - Reihe\ I$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{array} \qquad III - 2 \cdot II$$

Schritt2: hier: $Reihe\ III - 2 \cdot Reihe\ II$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}$$

Nun ist man schon fertig, da jede Zahl unter der Diagonalen 0 ist.

Jetzt muss man nur die Variablen von unten nach oben wieder dazuschreiben und auflösen:

Aus der untersten Reihe sieht man: $8z = 8 \rightarrow \quad z = 1$

Aus der mittleren Reihe sieht man: $1y - 3z = -1$, da wir schon wissen dass z=1 ist gilt: $\rightarrow y = 2$

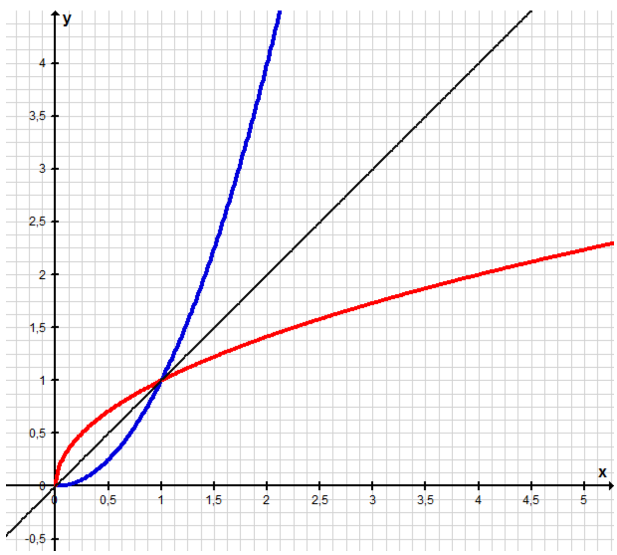
Aus der obersten Reihe sieht man: $1x + 1y + 1z = 6$, mit z=1 und y=2 gilt: $\rightarrow x = 3$

$$Ergebnis: \; x = 3, \qquad y = 2, \qquad z = 1$$

0.4 Umkehrfunktionen

Was ist überhaupt eine Umkehrfunktion?

Eine Umkehrfunktion ist eine Funktion, die eine Abbildung umkehrt. Geometrisch betrachtet erhält man die Umkehrfunktion wenn man die eigentliche Funktion an der ersten Winkelhalbierenden spiegelt. Rechnerisch erhält man die Umkehrfunktion, wenn man x mit y tauscht und dann wieder nach y auflöst.



Dies ist ein Thema, welches Schüler täglich benutzen, ohne es überhaupt explizit zu wissen, dass man es benutzt. Jetzt fragt ihr euch bestimmt: „Wo benutze ich denn immer eine Umkehrfunktion?"
Ganz einfach: z.B. beim Wurzelziehen. Ich benutze die $\sqrt{\;}$ um ein Quadrat zu lösen.

$$x^2 = 2 \rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{2} \rightarrow \; |x| = \sqrt{2}$$

Habt ihr euch schon mal gefragt, warum ihr $\sin(x)$- Gleichungen immer mit $\sin^{-1}(x)$ löst?

Genau, weil $\sin^{-1}(x)$ (wörtlich „Arkussinus") die Umkehrfunktion von $\sin(x)$ ist.

$$\sin(x) = 0{,}5 \quad \rightarrow \quad \sin^{-1}(\sin(x)) = \sin^{-1}(0{,}5) \quad \rightarrow \quad x = \sin^{-1}(0{,}5)$$

Sind Umkehrfunktion und Funktion ineinander verknüpft ($\sqrt{x^2}, \sin^{-1}(\sin(x)), e^{\ln(x)}, \ldots$), so lösen sie sich gegenseitig auf.

Wichtige Umkehrfunktionen im Abitur:

x^2	x^n	$\sin$	$\cos$	$\tan$	e^x	10^x
$\sqrt{x}$	$\sqrt[n]{x}$	$\sin^{-1}$	$\cos^{-1}$	$\tan^{-1}$	$\ln(x)$	$\log(x)$

In der Tabelle sieht man auch was der Unterschied zwischen $\ln(x)$ und $\log(x)$ ist.

- $\log(x)$ ist die Umkehrfunktion zu 10^x, deshalb nennt man ihn auch „Logarithmus zu Basis 10“ bzw. „dekadischer Logarithmus“.
- $\ln(x)$ ist die Umkehrfunktion zu e^x, deshalb nennt man ihn auch „Logarithmus zur Basis e“ bzw. „natürlicher Logarithmus“.

<u>Weiterhin gilt:</u>

- Jede streng monotone Funktion besitzt eine Umkehrfunktion.
- Jede über einem Intervall I stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle x ∈ I ist umkehrbar.

Eine Funktion heißt **stetig**, wenn man den dazugehörigen Graphen von einem Intervallpunkt bis zum anderen zeichnen kann, ohne den Stift dabei absetzen zu müssen.

Eine Funktion ist **differenzierbar**, wenn die Ableitung an jedem Punkt des Intervalls existiert. Anschaulich lässt sich eine differenzierbare Funktion ohne „Knick“ zeichnen.

Eine Funktion ist ***stetig differenzierbar***, wenn ihre Ableitungsfunktion stetig ist.

0.5 Mengenschreibweisen

Viele Schülerinnen und Schüler bringen oft die Begriffe reelle, rationale, irrationale und natürliche Zahlen durcheinander. Deshalb hier nochmal eine kurze Wiederholung:

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$: z.B. 1, 2, 3, 4,... bedeutet: Alle positiven ganzen Zahlen

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$: z.B. -5, -1, 3, 9 bedeutet: Alle ganzen Zahlen

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$: z.B. $\frac{4}{7}, \frac{132}{91}, \frac{3}{3}$ bedeutet: Alle Zahlen, die sich durch einen Bruch aus zwei ganzen Zahlen schreiben lassen

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$: z.B. $\sqrt{3},\ \pi,\ \frac{\sqrt{5}}{4}$ bedeutet: Alle Zahlen, außer Wurzeln von negativen Zahlen

spezielle Schreibweisen:

\	: „ohne“	z.B. $\mathbb{N}\backslash\{3\}$	bedeutet: Alle natürlichen Zahlen ohne 3
*	: „ohne 0“	z.B. $\mathbb{R}^*$	bedeutet: Alle reellen Zahlen ohne 0
+	: „nur positive“	z.B. $\mathbb{R}_+$	bedeutet: Alle positiven reellen Zahlen
-	: „nur negative“	z.B. $\mathbb{R}_-$	bedeutet: Alle negativen reellen Zahlen

Mengenschreibweise:

geschweifte Klammern { } = einzelne Elemente, Zahlen

z.B. {2 , 4} : die Element 2 und 4

eckige Klammern [ ] = „von bis“

z.B. [2 , 4] : von 2 bis 4 (2 und 4 eingeschlossen)
]2 , 4[: von 2 bis 4 (2 und 4 ausgeschlossen)

Aufgabenblatt 0: Grundlagen

Aufgabe 1:

Löse folgende Quadratische Gleichungen.

a) $10x - 4 \cdot (-3x + 1) - 2(x + 23) \cdot (x + 1) = 6$
b) $x^2 + 2x = 0$
c) $-x^2 + x = -\frac{1}{2}$
d) $3x^2 + 12x + 3 = 0$
e) $4x^2 - 16 = 0$

Aufgabe 2:

Löse folgendes Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

$$7\text{x} + 3\text{y} - 5\text{z} = -12$$

$$-x - 2y + 4z = 5$$

$$-4x + y - 3z = 1$$

Aufgabe 3:

Führe folgende Polynomdivision durch.

a) $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 3)$
b) $(2x^3 - 14x - 12) : (x + 2)$
c) $(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 6) : (x - 3)$

Aufgabe 4:

Bilde die Umkehrfunktion zu den gegebenen Funktionen. Überlege in jedem Fall, ob es überhaupt eine Umkehrfunktion gibt.

$a)\ y = 2x + 1 \qquad x \in [3; 9]$

$b)\ y = 3x - 5 \qquad x \in \mathbb{R}$

$c)\ y = x^2 + 1 \qquad x \geq 1, x \in \mathbb{R}$

$d)\ y = e^x \qquad x > 0, x \in \mathbb{R}$