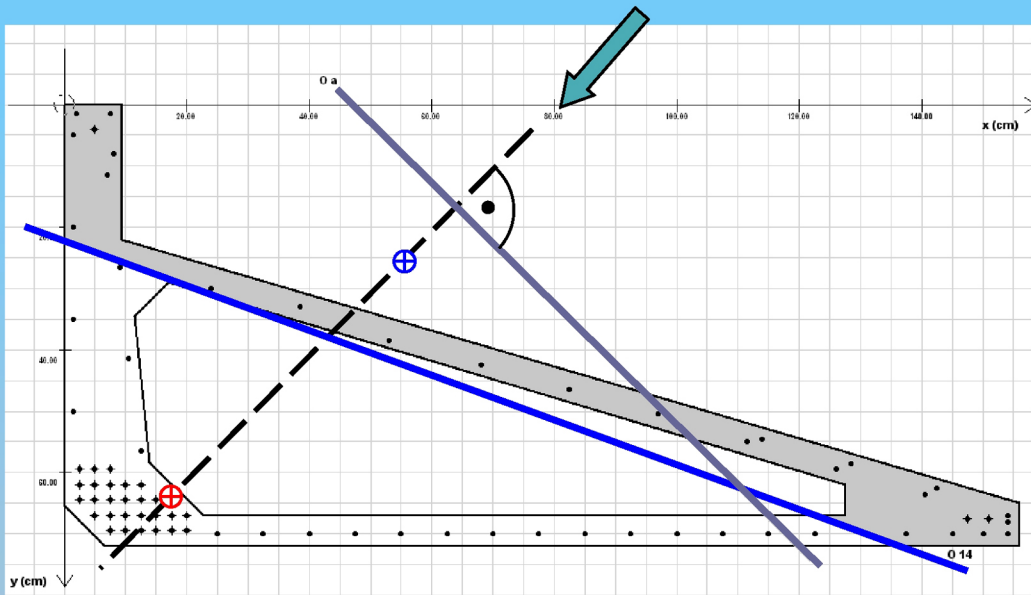


Hermann Flessner

Erste Arbeiten mit Zuse-Computern



Band 2

Biegefestigkeit
bewehrter Betonträger

HERMANN FLESSNER

ERSTE ARBEITEN MIT ZUSE-COMPUTERN

BAND 2

Erste Arbeiten mit Zuse-Computern

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr.-Ing. Ulrich Quast

Band 2

Digitales Berechnen
der Biegefestigkeit
bewehrter Betonträger

Von Prof. em. Dr.-Ing. Hermann Flessner
Universität Hamburg

Mit 167 Abbildungen

Prof. em. Dr.-Ing. Hermann Flessner

Geboren 1930 in Hamburg. Nach Abitur 1950 – 1952 Zimmererlehre in Düsseldorf. 1953 – 1957 Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Hochschule Hannover. 1958 – 1962 Statiker und Konstrukteur in der Ed. Züblin AG. 1962 Wiss. Mitarbeiter am Institut für Massivbau der TH Hannover; dort 1964 Lehrauftrag und 1965 Promotion. Ebd. 1966 Professor für Elektronisches Rechnen im Bauwesen. 1968 – 1978 Professor für Angewandte Informatik im Ingenieurwesen an der Ruhr-Universität Bochum; 1969 – 70 zwischenzeitlich Gastprofessor am Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.), Cambridge, USA. Ab 1978 Ordentl. Professor für Angewandte Informatik in Naturwissenschaft und Technik an der Universität Hamburg. Dort 1994 Emeritierung, danach beratender Ingenieur.

Biografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliothek; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar über:

Flessner, Hermann: Erste Arbeiten mit ZUSE-Computern, Band 2

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Entnahme von Abbildungen, der Wiedergabe auf photomechanischem oder digitalem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bzw. Datenträgern jeglicher Art bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten.

© 2016 H. Flessner, D - 21029 Hamburg

2. Auflage 2017

Herstellung und Verlag: BoD – [Books on Demand](#), Norderstedt

Text und Umschlaggestaltung: Hermann Flessner

ISBN: 978-3-7412-6465-8

Geleitwort

Die ersten Arbeiten befassen sich sehr ausführlich auch mit dem Querschnitt eines vorgefertigten Hohlkasten-Shedträgers. Er zielt deshalb vollkommen zu Recht den Umschlag dieses Buches. Er ist im Bild gegenüber seinem Einbauzustand gedreht. [Abbildung 69](#) zeigt ihn, quer dargestellt, in nicht verdrehter Lage. Der Pfeil symbolisiert die einwirkende Lastrichtung, wie gewohnt senkrecht nach unten. [Abbildung 92](#) zeigt das Foto eines solchen Shedträgers bei der Montage.

Im Jahre 1965 war die Frage: „Wie groß ist die Tragfähigkeit dieses ausgefallenen Querschnitts?“ Wer kann sie zutreffend berechnen?

Ist die Lage der Dehnungs-Null-Linie bestimmt, hat man gewonnen. Sie trennt die grau angelegte Druckzone von der Zugzone. Die Zugzone des Querschnitts ist gerissen und deshalb frei von Betonzugspannungen. Dies erschwert die Berechnung zusätzlich. Der Ort der berechneten Resultierenden der Druckkräfte ist mit einem blauen Kreis mit Kreuz eingetragen; die Resultierende der Zugkräfte mit einem roten Kreis mit Kreuz. Beide müssen auf der Wirkungslinie der Last liegen. Druck- und Zugresultierende bilden ein Kräftepaar. Ihr Abstand, ihr Hebelarm, ergibt mit der Kraft der Druck- oder Zugresultierenden multipliziert, das Moment der inneren Kräfte, das innere Biegemoment. Im Gleichgewichtszustand muss es gleich groß wie das am Träger ermittelte Biegemoment aus der äußeren Last sein, das äußere Biegemoment.

Aber wie kommt man zur Lage der Dehnungs-Null-Linie? Man nimmt eine Lage an und berechnet die Druck- und Zugresultierende zu einem angenommenen Dehnungs-Gradienten. Sind sie betragsmäßig nicht gleich groß oder liegen sie neben der Wirkungslinie der Last, dann ist die angenommene Lage falsch. Man muss eine andere Lage probieren und das solange bis es klappt. Die Berechnung der Resultierenden nach Größe und Ort ist bei diesem ausgefallenen Querschnitt schon für eine Lage sehr mühsam; erst recht das Wiederholen für verschiedene Lagen. Keine schöne Aufgabe.

Die Lösung eines Problems durch Wiederholen wird als Iteration bezeichnet. Von der aufwendigen Iteration ist bei Anwendung eines heutigen Computers nichts zu merken. Das richtige Ergebnis erscheint auf Tastendruck, im Tausendstel einer Sekunde. Bevor ein leistungsfähiges Berechnungsprogramm für beliebige Stahl- und Spannbetonquerschnitte erdacht und realisiert ist, sind viele Einzelprobleme zu lösen. Hierüber informiert dieser Band 2 mit dem Titel „Biegefestigkeit bewehrter Betonträger“. Er enthält den 2001 entstandenen korrigierten und erweiterten Neudruck der Dissertation von 1965 und die Ergänzung um das weitere [Kapitel 10](#) von 2015 „Ergänzungen zur Dissertation“. Der Quellcode des Berechnungsprogramms in der Programmiersprache ALGOL 60 ist zum vertiefenden Studium vollständig abgedruckt. Die Berechnungen für verschiedene Querschnitte zeigen wie allgemein es baupraktisch verwendet werden kann.

Zur Berechnung allgemeiner Betonquerschnitte mit Bewehrung gibt es inzwischen viele Programme. Aber es gibt nur wenige Fachveröffentlichungen, die den Formelapparat und die zielgerichtete Iteration für das Auffinden der Dehnungs-Null-Linie sehr ausführlich und verständlich beschreiben. Einige von ihnen verwenden den markanten Shed-Querschnitt als Rechenbeispiel. Die Suchmaschine Google liefert zur Eingabe „Stahl- und Spannbetonquerschnitte“ viele Fundstellen; die meisten ohne Bedeutung zu diesem Thema. Interessant ist aber, dass die Bildausgabe diesen Shed-Querschnitt als eines der ersten Bilder zeigt. Dieser markante Shed-Querschnitt hat es Vielen angetan.

Heute sind ZUSE-Computer wertvolle Museumsstücke. Die Rechenzeit betrug für den Shed-Querschnitt 1965 ungefähr 30 Stunden, heute Tausendstel einer Sekunde. Diese rasante Entwicklung verdient es aufgeschrieben zu werden. Dies hat der Autor mit großer Hingabe getan. Er geht im [Kapitel 10](#) sehr sorgfältig auf die Ursachen für unterschiedliches Iterationsverhalten ein und verschweigt auch erste Fehlschläge nicht. In diesem autobiografisch geschriebenen Kapitel erwähnt er seine Kontakte mit Fachkollegen im geteilten Deutschland, die sich in der Pionierzeit der Computeranwendung im Stahlbetonbau ebenfalls mit der Programmierung zur Berechnung beliebiger Querschnitte befasst hatten. Der Autor hat in diesem zweiten Band seine persönliche Geschichte zu dieser speziellen Computer-Anwendung im Stahlbetonbau aufgeschrieben. Es ist einer der wenigen Beiträge zur Geschichte des Bauingenieurwesens. Der landläufigen Meinung, das Bauingenieurwesen sei eine geschichtslose Zunft, wird mit den beiden Bänden „Erste Arbeiten mit ZUSE-Computern“ eindrucksvoll widersprochen.

Seevetal, im November 2015

Ulrich Quast

Vorwort

Den Hauptteil dieses 2. Buchbandes bildet meine Dissertation, die ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Hannover in der Zeit von 1963 bis 1965 anfertigte. Die Betreuung übernahm der Direktor des Instituts Prof. Zerna, der als einer der ersten Bauingenieure erkannte, welche Bedeutung die damals so genannten elektronischen Rechenanlagen einmal für technische Berechnungen besonders im Bauwesen haben würden. Professor Zerna hatte in den dreißiger Jahren des vorigen Jahrhunderts an der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg studiert und war nach seinem Studium dort einige Zeit Assistent am selben Institut tätig, an dem vor ihm auch Konrad Zuse wissenschaftlicher Mitarbeiter war; Zerna kannte Zuse schon damals als einen seiner Vorgänger und wusste auch über seine Erfindungen Bescheid, zumindest oberflächlich. Nach dem 2. Weltkrieg entstand um 1958 zwischen beiden eine neue Verbindung über die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), in der Zerna im sog. Vergabeausschuss für Elektronische Rechenanlagen mithalf, Rechenmaschinen für einschlägig tätige Hochschuleinrichtungen als Leihgaben zu bewilligen. In der Zeit wurde auch dem Institut für Massivbau eine ZUSE Z22 zugeteilt, mit welcher der Autor arbeitete, die Programme seiner Dissertation schrieb und letztendlich seine Hochschullaufbahn startete. Während dieser Zeit entstand auch seine sich stetig festigende Verbindung mit Konrad Zuse, der sich oft über die Fortschritte der Dissertation erkundigte und auch gute Ratschläge gab.

Die Urfassung der Dissertation mit dem Titel »*Nachweis der Biegefestigkeit von bewehrten Betonträgern mit digitalen Rechenautomaten*« wurde mit den damals vorgeschriebenen 350 Belegexemplaren, und weiteren 100 für den eigenen Bedarf, 1966 veröffentlicht und war um 1970 vergriffen. Nach 1966 entstanden mehrere Versionen des besonders wichtigen *Programms VII*, siehe Abschnitt 9.2 ab Seite 208, in den Programmiersprachen FORTRAN IV und PL/1, die vor allem auf Großrechnern an Rechenzentren der Universitäten zum Einsatz kamen. Dazu sei erwähnt, dass allein *ein* Rechenlauf des ursprünglichen Programms VII, mit seinen hohen Genauigkeitsansprüchen, auf der Z22 in ALGOL 60 (**Al**gorithmic **L**anguage) bis zu 30 Stunden benötigte und auch die Speicherkapazität der Maschine voll auslastete. Man kann sich leicht vorstellen, welchen Aufwand allein ein Testlauf oder eine wenn auch noch so kleine Programmänderung erforderte. Auf den großen Rechenanlagen Control Data CDC 1604 A im Rechenzentrum der TH Hannover und in den USA mit den Anlagen IBM 360/65, /67 und /85 am Massachusetts Institute of Technology, dem M. I. T., ging das alles natürlich schneller. – Zwischenzeitlich waren bis um 1980 aber so viele korrigierte und verbesserte Programm-Versionen entstanden, dass ein verbreiteter Einsatz sinnvoll war. Wie in [Kapitel 10](#) dieses Buches beschrieben wird, läuft ein Rechengang heutzutage im Mikrosekundenbereich ab, gewissermaßen auf Knopfdruck. Rechenzeit spielt eigentlich keine Rolle mehr.

Im Jahre 1997 wurde der Autor zur Vorstellung seiner bisher aus der Dissertation hervorgegangenen Weiterentwicklungen von der Industrie eingeladen. Es war inzwischen eine CAD-Version¹ in Verbindung mit anderen Programmen für Festigkeitsberechnungen als CD-ROM hergestellt worden. Daraus entstand eine Zusammenarbeit mit Industrie und Behörden. Sie machte es aber auch nötig, die Grundlage dafür, also die Dissertationsschrift, noch einmal aufzulegen, denn sie war wiederum nur noch als Kopie erhältlich und als Arbeitsanleitung schwer verständlich. Eine entsprechende Zwischenveröffentlichung wurde zu diesem Zweck in kleiner Auflage 2001 geschrieben; sie bildet den Grundstock für dieses Buch.

¹CAD = **C**omputer **A**ided **D**esign

In diesem Buchband ist die Dissertation im Original weitgehend unverändert geblieben, auch die ursprüngliche Gliederung. Hinzugekommen sind jedoch alle sieben Programme als vollständige Quellcodes in ALGOL 60 in einem neuen Abschnitt 9.2 ab S. 187. Sie waren in der eingereichten Dissertation ursprünglich auch enthalten, wurden nach Abschluss des Promotionsverfahrens auf Anraten der Referenten aber wieder gestrichen. Das wichtigste Programm VII ist, hier noch bewußt ebenfalls in ALGOL 60, im Abschnitt 9.3 ab Seite 213 als »Programm VII *neu*« mit aufgenommen, weil es alle letzten Korrekturen und Erweiterungen aufweist, die in Bezug auf die eigentlichen Berechnungsverfahren bis heute entstanden sind. Es fehlt allerdings der umfangreiche Dialog- und Grafikteil des Programms, der erst sehr viel später möglich wurde – die allgemeine wissenschaftliche Entwicklung bei den Computern war noch nicht so weit. Jetzt verfügbare neuzeitliche grafische Verfahren werden aber mit Beschreibungen der inzwischen vorgenommenen Korrekturen und Erweiterungen, mit mehreren Anwendungsbeispielen, in [Kapitel 10](#) ausführlich behandelt.

Wie gesagt ist der Inhalt der Dissertation erhalten geblieben. Es wurde aber durchgehend versucht, durch einige stilistische Maßnahmen und Ergänzungen im Text und über Fußnoten die Lesbarkeit zu verbessern. Der Autor hofft, dass auch Leser ohne vertiefte Kenntnisse über das hier dargestellte Sachgebiet, zumindest Bauingenieure, mit CAD-Methoden keine Verständnisschwierigkeiten haben. Die 1965 noch geltenden amtlichen Maßeinheiten wie *Kilopond* und *Megapond* wurden ebenfalls beibehalten, damit man alle Berechnungen und Beispiele mit der Urschrift direkt ohne Umrechnung vergleichen kann. Anpassungen an die inzwischen verbindlich eingeführten neuen Baunormen wie die DIN-Vorschriften, den EUROCODE 2 sowie an sonstige internationale Regeln werden jedoch im [Kapitel 10](#) ebenfalls behandelt.

Das hier wieder noch in ALGOL 60 dargestellte »**Programm VII neu**« im Abschnitt 9.3 hat DIRK HERR bereits 1997 in die Objektorientierte Programmiersprache *Borland C++ für Windows* implementiert und mit Datensätzen für wichtige Testberechnungen ausgestattet [29, 30]. Dieses Programm ist von vielen Anwendern in Ingenieurbüros und Baufirmen als Vorlage für eigene, selbstentwickelte Systeme benutzt worden, die sich schon seit einiger Zeit im Einsatz befinden und offensichtlich bewährt haben. Die Quellcodes sind verfügbar: HERR, D. [28], man wende sich an den Autor FLESSNER.

Besonders erwähnen möchte ich schon an dieser Stelle die Arbeiten, die von Prof. Ulrich Quast, Dr. Dirk Busjaeger und weiteren Mitarbeitern an der TU Hamburg-Harburg durchgeführt wurden, veröffentlicht insbesondere in [39]. Diese Arbeiten sind besonders wertvoll für den Vergleich mit meinen Ergebnissen. QUAST hat dazu beispielsweise im Jahre 2002 einen unsymmetrischen Plattenbalken aus meiner Dissertation herangezogen, siehe darin in diesem Buch S. 170, den ich darum auch in dieser Abhandlung im Abschn. 10.7.2 ab S. 261 noch einmal berechnet und dargestellt habe. Die Ergebnisse sind für beide Seiten überzeugend.

Der Text für den hiermit vorgelegten Buchband wurde wieder mit dem System \LaTeX für Textverarbeitung gesetzt und mit einer Weiterentwicklung von \LaTeX für Windows, dem System Win \TeX 2000 erzeugt. Alle unter *Microsoft Word* geschaffenen Zeichnungen und Fotografien sind mit dem neuen Software-Paket *graphicx* von \LaTeX in *.pdf-Dateien konvertiert und platzgerecht eingefügt worden.

Der Inhalt dieses Bandes 2 wurde verfasst in wissenschaftlich formalem Schreibstil. Das [Kap. 10](#) ist aber weitgehend autobiografisch geschrieben.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	VII
1 Die Dissertation	13
1.1 Einleitung und Problemstellung	13
1.2 Verwendung programmgesteuerter digitaler Rechenanlagen	14
1.3 Hinweise zur Programmierung	16
2 Abkürzungen und Bezeichnungen	18
3 Grundlagen und bekannte Berechnungswege	22
4 Entwicklung des Rekursionsverfahrens	29
4.1 Annahmen und Voraussetzungen	30
4.2 Lösungswege	31
4.3 Rekursionsformel für die Druckkraft D	35
4.3.1 Beanspruchungsgrad α	35
4.3.2 Analytische Darstellung der Geometrie des Biegedruckkraft-Volumens	42
4.3.3 Integration der Gleichung für die Druckkraft D	44
4.3.4 Umformung zur programmierbaren Beziehung für die Druckkraft D	47
4.3.5 Vereinfachte Darstellung der Rekursionsformel für D	53
4.4 Rekursionsformel für das Moment M_{D_x}	53
4.4.1 Grundlegende Betrachtungen zur Aufstellung der Momentenbeziehung M_{D_x}	53
4.4.2 Momenten-Formbeiwert μ aus der Spannungsfunktion	55
4.4.3 Gleichung des Druckkraftmomentes M_{D_x}	57
4.4.4 Integration der Momentengleichung für M_{D_x}	58
4.4.5 Umformung zur programmierbaren Beziehung für das Moment M_{D_x}	62
4.4.6 Vereinfachte Darstellung der Rekursionsformel für M_{D_x}	65
4.5 Rekursionsformel für das Moment M_{D_y}	65
4.5.1 Ausgangsbeziehungen zur Bildung der Momentenformel M_{D_y}	65
4.5.2 Integration der Momentenformel für M_{D_y}	67
4.5.3 Umformung zur programmierbaren Beziehung für das Moment M_{D_y}	70
4.6 Beurteilung des Rekursionsverfahrens	74

4.7	Sonderfall $\sigma_{(\eta)} = 1$	77
4.8	Programmierung der Rekursionsformeln	78
5	Gewinnung der Spannungsfunktionen	82
5.1	Modifikation des NEWTONSchen Interpolationsverfahrens	82
5.2	Programmierung des Rechenprogramms	87
5.3	Koeffizienten von Ersatzfunktionen einiger Werkstoffe	88
6	Anwendungen der Rekursionsformeln	100
6.1	Neutrale Faser	100
6.2	Einachsige Biegung mit und ohne Längskraft	103
6.2.1	Bemessung nach dem n -Verfahren	103
6.2.1.1	Mathematische Aufbereitung der Bemessungsansätze.	104
6.2.1.2	Spezielle Iterationsvorschrift für das n -Verfahren	106
6.2.1.3	Allgemeine Iterationsvorschriften.	109
6.2.1.4	Bemessungsprogramme I und II	120
6.2.1.5	Demonstrationsbeispiele.	123
6.2.2	Bemessung nach dem Traglastverfahren	130
6.2.2.1	Bemessungsprogramm III	131
6.2.2.2	Demonstrationsbeispiel.	133
6.2.3	Berechnung des Tragvermögens	134
6.2.3.1	Aufstellung und Beschreibung des Programms IV.	134
6.2.3.2	Demonstrationsbeispiele.	136
6.2.4	Nachweis der Bruchsicherheit	138
6.2.4.1	Programm V für den Bruchsicherheitsnachweis	139
6.2.4.2	Programm VI für das Bruchmoment	146
6.3	Schiefe Biegung mit und ohne Längskraft	150
6.3.1	Allgemeine Beziehungen	150
6.3.2	Nachweis der Bruchsicherheit	156
6.3.2.1	Programm VII für das aufnehmbare Bruchmoment	156
6.3.2.2	Demonstrationsbeispiele.	159
6.3.3	Hinweise zur Berechnung bei gegebener Belastung	165
6.4	Verallgemeinerung der Aufgabenstellung	166
6.5	Berechnungsbeispiele aus der Praxis	168
6.5.1	Bemessung nach dem n -Verfahren und dem Traglastverfahren	168
6.5.2	Berechnung des Tragvermögens	169

6.5.3	Bruchsicherheit eines vorgespannten Fertigteilträgers	170
6.5.4	Bruchsicherheit Kreisquerschnitt und Hohlkasten	172
6.5.5	Bruchsicherheit unsymmetrischer Fertigteilträger	175
6.5.6	Bruchsicherheit unsymmetrischer Brückenträger	177
6.5.7	Bruchsicherheit eines Sheddach-Trägers	178
7	Möglichkeiten zur Erweiterung	183
8	Zusammenfassung	184
9	Arbeitsfähige Rechenprogramme in ALGOL 60	185
9.1	Einfaches Bemessungsprogramm	185
9.2	Programme der Dissertation	187
9.3	Programm erstellt nach der Dissertation	213
10	Ergänzungen zur Dissertation	219
10.1	Weiterentwicklungen	221
10.1.1	Iterationsverfahren	221
10.1.2	Rechengang beim Shedträger	226
10.2	Berechnung der Flächenwerte	237
10.3	Kernquerschnitte	240
10.4	Zugspannungen im Beton	243
10.5	Fehlerbehebung	252
10.6	Grafische Zusatzverfahren	253
10.7	Anwendungsbeispiele	255
10.7.1	Plattenbalken	260
10.7.2	Unsymmetrischer Plattenbalken	261
10.7.3	Biegebeanspruchung im runden Stahlbetonquerschnitt	262
10.7.4	Biegebeanspruchung im Rohrquerschnitt	265
10.7.5	Randbalken mit unsymmetrischem Plattenbalkenquerschnitt	268
10.7.6	Wandträger	272
10.7.7	Tegelbaken-Brücke in Stockholm	274
10.7.8	Eisenbahn-Krogträgerbrücke bei Innsbruck	276
10.7.9	Fahrwegträger für Magnetschwebbahnen	281
11	Schlussbemerkungen	293
	Literatur	294

1 Die Dissertation von 1965

1.1 Einleitung und Problemstellung

Zur Ermittlung der Schnitt- und Auflagerkräfte und der Verformungen von Tragwerken lagen ab 1962 bereits für elektronische Berechnungen geeignete digitale Methoden vor, besonders für Bauwerke, die nach den Regeln der Stabstatik behandelt werden. Dagegen fehlten solche für die Bemessung, den Spannungsnachweis und die Berechnung des Tragvermögens von Baugliedern, wenn man von einigen Ansätzen und Lösungen weniger Teilaufgaben absieht.

Es war das Ziel der vorliegenden Arbeit, diese Lücke so gut wie möglich zu schließen und digitale Verfahren zu entwickeln, mit denen bei Biegung der Standsicherheitsnachweis und die Bemessung in allen Abwandlungen der Fragestellung, also auch bei schiefer Biegung, für beliebige, polygonförmig umgrenzte Tragwerksquerschnitte durchführbar ist, und zwar für alle Materialien, die zur Anwendung gelangen können. Der Schwerpunkt der Untersuchungen liegt auf der Behandlung der genannten Aufgaben im Stahlbeton- und Spannbetonbau, doch sollen sich die Formeln auch auf andere Bereiche der Festigkeitslehre übertragen lassen.

Als Ausgangsgrößen für die Berechnungen sind die Maße der Querschnitte, die Arbeitslinien in Frage kommender Baustoffe und die Grenzwerte der Spannungen und Verformungen anzusehen, außerdem die wirksamen Schnittkräfte, wenn nicht gerade ihre aufnehmbaren Höchstwerte ermittelt werden sollen.² Da die Arbeitslinien der Baustoffe bis zu deren Bruchbeanspruchungen als Ersatzfunktionen dargestellt werden, lassen sich gleichermaßen alle Bemessungen und Nachweise sowohl innerhalb des Proportionalitätsbereiches als auch nach den Voraussetzungen des Traglastverfahrens durchführen. Die wesentlichen Bestandteile der Arbeit sind

1. ein Rekursionsverfahren zur Ermittlung der inneren Kräfte und Momente eines beliebig polygonförmig umgrenzten Querschnittes,
2. ein Iterationsverfahren in einigen Variationen, mit dem bei guter Konvergenz die Lage der neutralen Faser in jeder gewünschten Genauigkeit bestimmt werden kann und
3. eine Modifikation des NEWTONSchen Interpolationsverfahrens zur Aufstellung von Ersatzfunktionen, wie sie für die Darstellung der Arbeitslinien gebraucht werden; auch hierbei handelt es sich um eine Rekursionsformel.

Das Interpolationsverfahren nach NEWTON wurde so modifiziert, dass sich eine gut programmierbare, dabei sehr einfache Möglichkeit anbot, aus den empirisch gewonnenen Spannungs-Dehnungs-Gesetzen für Beton und Stahl entsprechende, stetige Ersatzfunktion zu bilden. Dieser dritte Bestandteil kann gewissermaßen als Nebenprodukt der Arbeit angesehen werden.

Alle drei Teilaufgaben wurden mit besonderer Berücksichtigung der ausschließlichen Anwendung in programmgesteuerten Digitalrechnern behandelt.³ Für Handrechnungen waren sie von Beginn an nicht geeignet und auch nicht gedacht.

²Mit Recht wurde eingewendet (Prof. GAEDE, Hannover), dass der Terminus „Arbeitslinie“, der in der Fachliteratur im hier benutzten Zusammenhang oft verwendet wird und auch vom Autor übernommen wurde, nicht korrekt ist. Richtig muß es heißen: *Spannungs-Dehnungs-Linie* oder *-Funktion* oder auch schlicht *Materialgesetz*. Denn Arbeit hat die Dimension *Joule* und Spannung die Dimension kp/cm^2 bzw. N/mm^2 .

³Heute gilt dafür allgemein die Bezeichnung „Computer“. Zur Zeit der ersten Veröffentlichung dieser Arbeit (Promotion) spielten programmgesteuerte „Analogrechner“ noch eine bedeutende Rolle.

Mit den neuen Beziehungen wurden die Voraussetzungen geschaffen, auch solche Festigkeitsberechnungen der beschriebenen Art in der Praxis auf programmgesteuerten Digitalrechnern wirtschaftlich und dabei im Rahmen der durch die Materialgrößen bestimmten Grenzen genau durchführen zu können, die manuell nur näherungsweise oder mit übermäßig großem Aufwand bewältigt werden konnten. Es sei betont, dass alle Anforderungen an die arithmetische Genauigkeit zwar erfüllt werden können, jedoch zweitrangig sind. Wichtig ist in erster Linie die vielseitige Brauchbarkeit. Auf sie wird in [Kap. 7](#) rückblickend noch ausführlich eingegangen werden.

Schließlich wird anhand einiger Beispiele, für symmetrische und unsymmetrische Querschnitte, bei einachsiger und schiefer Biegung, die Wirkungsweise der Verfahren gezeigt. Alle dazu notwendigen Programme wurden in ALGOL 60 aufgestellt und grundsätzlich nur so lang, dass sie in eine Rechananlage der Größenordnung einer ZUSE Z 22 einlesbar sind, dann kompiliert werden und in einem Durchgang ablaufen können. Die Elemente der Programmiersprache ALGOL 60 und die dafür gültigen Konventionen entnehme man dem ALGOL-Manual der ALCOR-Gruppe [\[1, 2\]](#).

1.2 Verwendung programmgesteuerter digitaler Rechanlagen

Werden programmgesteuerte Rechanlagen zur Lösung eines Problems herangezogen, dann geht man am besten von den grundlegenden Gesetzmäßigkeiten des Problems aus. Aus ihnen sind dann den Eigenarten der Rechanlagen angepaßte mathematische Formulierungen zu entwickeln, welche die Ausgangsvorschriften für die Rechenprogramme darstellen. Im allgemeinen sind die dafür bisher üblichen Handrechnungsmethoden nicht geeignet.

Man spricht von einem „digitalen“ Rechenverfahren und meint im Grunde genommen damit lediglich eine Methode, die auf die Arbeitsweise eines Digitalrechners besonders zugeschnitten ist. Eine Definition für eine besondere Rechenart ist diese Bezeichnung nicht. Welche Rechenarten als „digital“ angesehen werden können, läßt sich nicht grundsätzlich festlegen. Bestimmt gehört zu ihnen der *Matrizenkalkül*, wenn er auch in einigen Fällen wegen Anhäufung numerischer Fehler Nachteile zeigt. *Iterationsverfahren* sind dann sehr gut brauchbar und als digital zu bezeichnen, wenn die Konvergenz der Iterationsvorschriften, im Bereich der erforderlichen Zahlengenauigkeit der Ergebnisse, durch klare Rechanweisungen gesteuert werden kann. Häufig wird die Ansicht vertreten, dass Rekursionsformeln für das digitale Programmieren ungeeignet seien, weil ihre Ergebnisse Rundungsfehler aufweisen können, auch bei großer Zahlenlänge in einer Maschine. Die Ursache dafür sollte man aber nicht im *rekursiven*⁴ Charakter einer Rechenvorschrift suchen, sondern in der Zahlenentwicklung eines Ausdrucks innerhalb der Gesamtformel bei der Durchrechnung der ganzen Aufgabe.

In dieser Arbeit werden Rekursionsverfahren hergeleitet, die man in ihrem Anwendungsbereich mit Recht als digital bezeichnen kann. Auch führen die ebenfalls neu entwickelten, übergeordneten Iterationsvorschriften mit guter Konvergenz zu sicheren Endergebnissen.

Unabhängig von der Art der verwendeten Programmiersprachen lassen sich einige übergeordnete Regeln aufstellen. Die Forderung nach einem möglichst digitalen Rechenverfahren wurde von Hintzen [\[3\]](#) in der allgemeinen Definition des sogenannten „Prinzips der Häufigkeit“ gestellt und dem Begriff der Optimierung des Speicherraums untergeordnet. Man versteht darunter das Bestreben nach einer kompakten Programmierung einiger typischer, möglichst rekursiver und

⁴...entspricht im Sinne dieser Arbeit nicht der strengen mathematischen Definition für die Rekursivität.

allgemeingültiger Rechenabläufe. Das Prinzip wird gegliedert in eines der inneren und eines der äußeren Häufigkeit.

Mit „innerer“ Häufigkeit ist die Anzahl der Schachtelungen von Rechenabläufen in Abhängigkeit von Zahlenindizes gemeint, etwa vergleichbar mit der Zahl von Summierungen, in der üblichen mathematischen Schreibweise angegeben durch aufeinanderfolgende Σ . Groschematisch ist ein Rechenablauf mit großer innerer Häufigkeit in Abb. 1 dargestellt, mit geringer in Abb. 2. Beispielsweise ist in ALGOL-Programmen dann eine große innere Häufigkeit vorhanden, wenn viele Laufanweisungen ineinander geschachtelt sind und verhältnismäßig wenige Sprunganweisungen und Marken vorkommen, siehe [2]. Bei geringer innerer Häufigkeit liegt das umgekehrte Verhältnis vor. Die Zahl der bedingten Anweisungen sagt über die innere Häufigkeit übrigens nichts aus. Ist die Entwicklungstendenz im Ablauf der Rechnung aus einer Formel in der üblichen mathematischen Schreibweise bereits ersichtlich, dann spricht man auch von einer „dynamischen“ Formel, im Gegensatz zu einer „statischen“. Dynamische Formeln ermöglichen Programme mit großer innerer Häufigkeit, sie erlauben eine besonders gute Ausnutzung der Rechenanlagen.

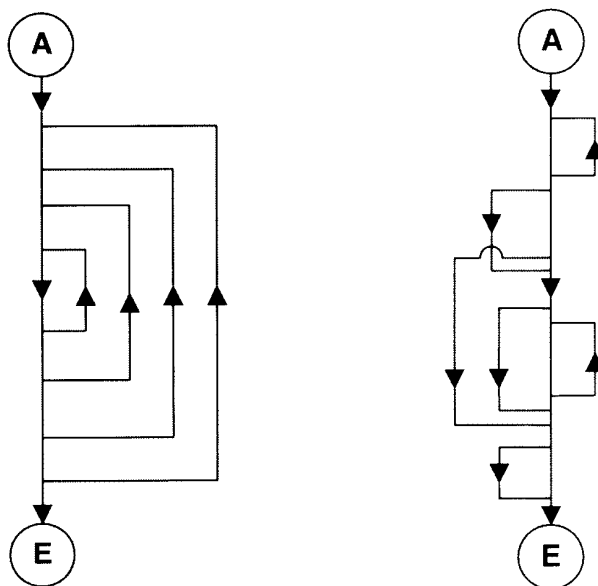


Abbildung 1: große, Abbildung 2: kleine
innere Häufigkeit

Unter einer „äußeren“ Häufigkeit versteht man die *Allgemeingültigkeit der Anwendbarkeit einer Rechenvorschrift*, s. HINTZEN [3]. Man sollte sie ebenfalls anstreben, soweit sie auf einen mit großer innerer Häufigkeit behafteten Programmteil bezogen ist. Derartig aufgestellte Programme sind ohne zusätzlichen logistischen Aufwand und mit gleichartigen Eingabedaten für viele verschiedene Abwandlungen einer Aufgabe brauchbar. Beispielhaft für mathematische Formulierungen, die die Aufstellung von Programmen mit großer innerer und großer äußerer Häufigkeit gestatten, sind das Reduktionsverfahren FALK, S., [4] und der erweiterte GAUSSsche Integralsatz zur Ermittlung von Querschnittwerten FLESSNER, H., [5]. Die Grenze, bis zu der man das Prinzip der äußeren Häufigkeit verfolgen sollte, ist dann erreicht, wenn mehrere, wenig voneinander abhängige Programmteile zu einem allgemein gültigen Hauptprogramm verknüpft werden. Der Anteil der rein logistischen Anweisungen im ganzen Programm wächst dann nämlich übermäßig stark an. Man sollte lieber mehrere einzelne, eigenständige Programme schreiben und bedenken, dass eine für den Benutzer ohne große Überlegungen und einfach zu fällende Entscheidung im Programmablauf

unter Umständen auf komplizierte Weise und sehr oft getroffen werden muß und deshalb nicht nur zusätzliche Speicherzellen in den Rechenanlagen belegt, sondern auch die Rechenzeit unnötig verlängert. Drei wesentliche Gründe sprechen gegen eine Programmlänge, die über die bei sinnvoller Auslegung des Prinzips der äußeren Häufigkeit gesteckte Grenze hinausgeht:

1. der sofort sehr stark anwachsende Speicher- und Rechenzeitbedarf für logische Entscheidungen,
2. der in gleicher Weise anschwellende Programmieraufwand nach Befehlsmenge und Schwierigkeit bzw. Unübersichtlichkeit und
3. die zwangsläufig umfangreichere Daten-Aufstellvorschrift und Bedienungsanweisung, was um so lästiger ist, je häufiger das Programm eingesetzt wird.

Es ist nur selten vorteilhaft, solche Berechnungen, die in einer umfassenden Aufgabe nur lose zusammenhängen, in ein Programm zu zwingen.

Bei der Aufstellung von ALGOL-Programmen, wie überhaupt beim Programmieren, ist es möglich, nach verschiedenen Gesichtspunkten vorzugehen. Man kann entweder schnell rechnende Programme schreiben, die meistens sehr unübersichtlich sind und verhältnismäßig viele Speicherplätze benötigen oder versuchen, in erster Linie möglichst wenig Speicherplätze zu belegen. Andererseits kann man auch vor allem große Anschaulichkeit bzw. Lesbarkeit der Programme anstreben. Eines schließt das andere aber mehr oder weniger aus.

In der vorliegenden Arbeit wird der Grundsatz der Anschaulichkeit vorangestellt und versucht, die Programme verständlich zu schreiben. Es wird außerdem darauf geachtet, dass die Programme eine gewisse Größe nicht überschreiten. Vielmehr werden nach den in diesem Abschnitt erläuterten Regeln mehrere Programme geschrieben, welche immer gerade für eine Fragestellung genügen, diese jedoch umfassend behandeln. Über allem steht natürlich eine eindeutige numerische Rechen-sicherheit.

1.3 Hinweise zur Programmierung

In [Kap. 6](#) sind alle Programme der Arbeit in ihren wesentlichen Teilen wiedergegeben. Sie wurden auf verschiedenen Rechenanlagen eingesetzt und geprüft (ZUSE Z 22 R, ZUSE Z 23, Control Data CDC 1604 A, Electrologica X1). Alle Beispiele, insbesondere auch die des Abschn. 6.5 sind mit ihnen ohne Zusätze berechnet worden.

Mit dem in Abschn. 5.2 beschriebenen Programm für die Gewinnung der Koeffizienten von Ersatzfunktionen für die Arbeitslinien wurden die hier verwendeten Werte berechnet. Mit ihm können auch jederzeit andere, in diese Arbeit nicht aufgenommene Spannungsfunktionen gebildet werden.

Bei Berechnungen auf anderen Rechenanlagen als denen der ZUSE KG sind unter Umständen einige Anweisungen durch die dann gültigen zu ersetzen, z.B. 'WRITE' und 'Type'. Darüber hinaus ist es nur bei ZUSE-Anlagen möglich, gewissermaßen ungewollt 'OWN' 'ARRAY' zu vereinbaren und dadurch mit den Programmen V bis VII die Funktionskonstanten in einem ersten Rechengang einzulesen, um danach, also mit dem zweiten Rechengang und den folgenden, beliebig viele Nachweise führen zu können. Eine Wertzuweisung in jedem Rechengang wie in den ersten Programmen fordert zu viele Speicherplätze, die Unterbringung der Koeffizienten in einer Z 22 oder Z 23 wäre unmöglich.

Grundsätzlich sind die Programme nur als Muster gedacht. Sie können vielfältig abgewandelt werden. Auch sind sie als Ablaufdiagramme für sehr schnell rechnende und kurze, maschinenintern⁵ geschriebene Programme verwendungsfähig. Die in dieser Arbeit gewählten Iterationsgrenzen sind erheblich genauer als es bei der praktischen Anwendung nötig sein dürfte. Über den normalen Rechenzeitbedarf läßt sich deshalb, und weil die Programme unterschiedlich aufgebaut sind, keine verbindliche Aussage machen. In der relativ langsamen Z 22 liegen die Rechenzeiten bei praktisch sinnvollen Iterationsgrenzen im ungünstigsten Falle, d.h. bei schiefer Biegung, kompliziertem Querschnitt und viele einzeln berücksichtigten Stahleinlagen, nicht über 30 Minuten.⁶ Der Rechenzeitdurchschnitt aller Beispiele in dieser Arbeit liegt bei ca. 6 Min. Dabei ist zu bemerken, dass die Programme ohne Rücksicht auf Rechnungsdauer in erster Linie lesbar und verständlich aufgebaut wurden. Übrigens werden für das Einlesen aller sieben Programme und für das Rechnen aller Beispiele dieser Arbeit auf der großen und schnellen Anlage CDC 1604 A insgesamt ca. 12 Min. benötigt, einschließlich Ausgabe aller Ergebnisse und Zwischenwerte über Zeilendrucker.⁷

⁵im *Assembler*

⁶Bei Testrechnungen am Shed-Träger Abschn. 6.5.7 mit höchstem „akademischem“ Genauigkeitsanspruch hat die Berechnung allerdings ca. 30 Stunden gedauert.

⁷...damals (1965) natürlich ohne Grafik.

2 Abkürzungen und Bezeichnungen

n	Verhältnis des Stahl-Elastizitätsmoduls zum Beton-Elastizitätsmodul (im n -Verfahren i.d.R. = 15)
β_R	Rechenwert der Betonfestigkeit
σ_{do}	Druckspannungen am oberen Rand eines Querschnittes
ε_R	Rechenwert der Grenzkürzung des Betons
ε_{do}	Kürzungen am oberen Rand eines Querschnittes
σ_B	Zugfestigkeit des Stahls nach DIN 4227
σ_E	Zugfestigkeit des Stahls bei PUCHER [7]
ε_{ER}	Rechenwert der Grenzdehnung des Stahls
σ_b	Spannung im Beton
σ_{bd}	Spannung am Druckrand des Betons
σ_{bz}	Zugspannungen des Betons
ε_b	Dehnung (Kürzung) im Beton
σ_e	Zugspannung des Stahls bei Biegung (Zustand II)
σ'_e	Druckspannung des Stahls bei Biegung (Zustand II)
ε_{ei}	Dehnung der i -ten Stahleinlage (schlaff)
ε_{vi}	Dehnung der i -ten Stahleinlage (vorgespannt)
$\Delta \varepsilon$	Dehnungsdifferenz
α	Völligkeitsmaß, Beanspruchungsgrad (nach DIN 1080)
μ	Momenten-Formbeiwert
$x_0 \dots x_k \dots x_n$	x -Koordinaten eines Querschnitts
$y_0 \dots y_k \dots y_n$	y -Koordinaten eines Querschnitts
$x_{q0} \dots x_{q\kappa} \dots x_{q\nu}$	x -Koordinaten einer Druckfläche
$y_{q0} \dots y_{q\kappa} \dots y_{q\nu}$	y -Koordinaten einer Druckfläche
$a_0 \dots a_i \dots a_m$	Koeffizienten einer normierten Spannungsfunktion
η	dimensionslose Veränderliche im Bereich der Höhe einer Druckfläche
b	Hilfsgröße s. Gleichung (31)
c	dimensionsloses Verzerrungsmaß der Spannungsfunktion des Betons

v	Abstand der Nulllinie vom gedrückten Rand
v_a	Anfangs-Nulllinienabstand vom gedrückten Rand
Δv	Verbesserung der Nulllinien-Verschiebung
F_d	Druckfläche
ΔF_d	Druckflächenelement
D	innere Druckkraft
D_a	innere Druckkraft in der Anfangslage der Nulllinie
ΔD	Druckkraftdifferenz
M_D ; M_{D_x}	Moment der Druckkraft D um die x-Achse
y_D	Abstand der Druckkraft D von der x-Achse
ΔM	Momentendifferenz
M_{D_y}	Moment der Druckkraft D um die y-Achse
x_D	Abstand der Druckkraft D von der y-Achse
Z	innere Zugkraft
ΔZ	Zugkraftdifferenz
M_{Z_x}	Moment der Zugkraft Z um die x-Achse
y_Z	Abstand der Zugkraft Z von der x-Achse
M_{Z_y}	Moment der Zugkraft Z um die y-Achse
x_Z	Abstand der Zugkraft Z von der y-Achse
ΔK	Differenz der inneren Kräfte
D_b	Betonanteil der inneren Druckkraft
D_e	Stahlanteil der inneren Druckkraft (in der Druckbewehrung)
h	Abstand des Schwerpunktes der gezogenen Stäbe vom gedrückten Rand
h'	Abstand des Schwerpunktes der gedrückten Stäbe vom Druckrand
d_0	Gesamthöhe eines Balkens
M	Biegemoment aus Belastung
M_x	... um die x-Achse
M_y	... um die y-Achse
M_R	resultierendes Biegemoment aus Belastung bei schiefer Biegung

e_y	Abstand der resultierenden Kraft N von der x-Achse bei schiefer Biegung
e_x	Abstand der resultierenden Kraft N von der y-Achse bei schiefer Biegung
M_e	auf die Lage der Zugbewehrung bezogenes Moment
N	Normalkraft aus Belastung
F_e	Querschnitt der Zugstäbe bei Biegung
F'_e	Querschnitt der Druckstäbe bei Biegung
y_{F_i}	Abstand der i-ten Stahleinlage von der x-Achse
$max y_f$	Abstand der äußersten Stahleinlage im Zugbereich eines Querschnittes
g	Anzahl der Stahlstränge einer Sorte
s	rechnerische Sicherheit gegen Bruch
c_x	Verschiebungsbetrag des Koordinatenursprungs in Richtung der x-Achse
c_y	Verschiebungsbetrag des Koordinatenursprungs in Richtung der y-Achse
ϱ	Winkel zwischen Lastrichtung und y-Achse des Ausgangssystems bei schiefer Biegung, außerdem Hilfwert in Abschn. 4.5.2
$\delta ; \lambda$	Hilfswerte in den Abschnitten 4.3.3, 4.3.4 u. 4.4.4
ϑ_j	Zwischenwinkel
φ_j	Winkelkorrektur
γ_j	Zwischensumme der Winkelkorrekturen
φ_0	Winkel zwischen endgültiger Nullinie und der x-Achse des Ausgangssystems
$\zeta_k ; \varphi_k ; \tau_k$	Hilfswerte in den Formeln (146), (147) u. (148) in Abschn. 4.5.3
\mathfrak{p}_k	Vektor (149b)
\mathfrak{r}	Dreiecksmatrix (164)
ξ_{ik}	Elemente (163) der Dreiecksmatrix (164)
\mathfrak{A}	Spaltenvektor (162)
A_i	Elemente des Spaltenvektors (162)
\mathfrak{B}_k	Matrix (149)

\mathbf{b}_k	Vektor der B_j (149a)
\mathfrak{M}_k	Matrix (150b)
\mathfrak{z}_k	Spaltenvektor (150)
B_j	Einflußanteile der Beton-Formänderungslinien auf die Rekursionsformeln für D , M_{D_x} und M_{D_y}
H_j	Reziproke Zählvariablen-Produkte in den Rekursionsformeln für D und M_{D_x}
0 ————— 0	Nulllinie allgemein
0_a ————— 0_a	Anfangsnulllinie
w ————— w	Spurgerade der Lastwirkungsebene auf der Querschnittfläche

Die in der Literatur und in Normen benutzten Formelzeichen sind wenn irgend möglich übernommen worden.

In den ALGOL-Programmen lassen sich die obenstehenden Bezeichnungen nur in großen Buchstaben der lateinischen Schrift, allein oder kombiniert mit Zahlen wiedergeben. Indizes werden dabei den Namen in eckigen Klammern angehängt, wenn sie Elemente von Matrizen, Vektoren oder einfachen Listen bezeichnen. Alle Schriftzeichen, die eine Größe kennzeichnen, stehen in der gleichen Zeile. Bei der Übernahme der Bezeichnungen und Formeln in die Rechenprogramme gelten in dieser Arbeit die Regeln:

- Größen, deren Bezeichnungen mit kleinen Buchstaben beginnen, werden ohne Zusatz dargestellt.
- Große Buchstaben werden von kleinen Buchstaben in den ALGOL-Programmen durch ein vorangestelltes **G** unterschieden.
- Griechische Buchstaben werden soweit ausgeschrieben, dass eine Verwechslung ausgeschlossen ist.

3 Grundlagen und bekannte Berechnungswege

Obwohl die Ableitungen und Gebrauchsformeln dieser Abhandlung in allen Bereichen der Festigkeitslehre gültig sein sollen, sind sie in erster Linie für den Stahlbeton und den Spannbeton gedacht.

Wie überall in der praktischen Entwurfsarbeit des Bauingenieurs ist bei der technischen Bearbeitung eines Betonbauwerkes der Nachweis einer bestimmten Standsicherheit aller Bauteile gefordert. Je nach Art des Vorgehens ist die Fragestellung unterschiedlich, jedoch einer von zwei Hauptaufgaben beizuordnen. Entweder ist bei gegebenen Abmessungen, Betonqualitäten und Stahlsorten die aufnehmbare Belastung zu berechnen, wobei die Einhaltung eines Sicherheitsgrades gefordert wird bzw., wenn die Belastung auch bekannt ist, der Sicherheitsgrad bestimmt werden muß. Oder es ist der Betonquerschnitt mit den Stahleinlagen so zu bemessen, dass die gewünschte Standsicherheit erreicht wird. Die erste Aufgabe ist prinzipiell relativ einfach zu lösen, die zweite jedoch nicht mehr eindeutig, wegen der vielen Freiheitsgrade in den Parametern für die Querschnittabmessungen und die Lage sowie Verteilung der Bewehrung.

Nach den Bestimmungen für die Ausführung von Bauwerken aus Stahlbeton, siehe DIN 1045, ist die Festigkeitsberechnung im „n-Verfahren“ nach der Art der auftretenden Spannungen im Verbundquerschnitt vorzunehmen, s. HABERSTOCK [6] und andernorts. In der DIN 4224 sind die dort unter Abschn. 1.1 aufgeführten Verfahren nach diesem Gesichtspunkt geordnet. Zwar sind alle diese Fälle mit den zu entwickelnden Formeln und Rechenansätzen erfaßbar, doch nur teilweise sinnvoll danach zu berechnen — so bei den in der DIN 4224, Abschn. 1.21 und 1.31 beschriebenen Beanspruchungsarten. Für die in DIN 4224, Abschn. 1.321 und 1.322 angegebenen Lastangriffe und Spannungsverteilungen, also für *reine Biegung* und für *Biegung mit Längskraft*, sind die Verfahren jedoch gut geeignet und auch gedacht.

Der Spannungsverlauf in einem Stahlbetonquerschnitt bei Biegung mit und ohne Längskraft infolge zunehmender Belastung ist in Abb. 3a bis 3d wiedergegeben; die Darstellung ist PUCHER [7], Abschn. Ce1. entnommen und dort auch erläutert. Überhaupt werden alle grundlegenden Hypothesen der Festigkeitslehre des Stahlbetons als bekannt vorausgesetzt, insbesondere auch die, welche für Berechnungsansätze bei Biegung im plastischen Bereich des Stahlbetons getroffen werden. Letztere sind ebenfalls bei PUCHER [7] im Abschn. Cq. aufgeführt.⁸

In einer Neufassung der DIN 1045 ist die Einführung des Traglastverfahrens bzw. *n*-freien Verfahrens vorgesehen, ähnlich wie es bereits in den TGL 11422 (Technische Normen, Gütevorschriften, Lieferbedingungen) für den Bereich der DDR, früher schon in Österreich in der Ö-Norm B 4200, 4. Teil und in einigen anderen Ländern geschehen ist. Ihnen liegt der Formänderungszustand und die Spannungsverteilung nach Abb. 3d zugrunde.

Wenn Digitalrechner auch in besonderen Fällen, z.B. für komplizierte Querschnittsformen, bei Zustand IIa (Abb. 3c) mit den Formeln dieser Arbeit vorteilhaft eingesetzt werden können, so ist doch hauptsächlich an die Behandlung der Aufgaben gedacht, für die Zustand IIb (Abb. 3d) maßgebend ist, also für Berechnungen nach dem Traglastverfahren und für Bruchsicherheitsnachweise im Spannbeton. Dabei tritt die neue Schwierigkeit auf, dass die Arbeitslinien nicht mehr linear verlaufen, sondern durch Funktionen höherer Ordnung erfaßt werden müssen.

Die Untersuchungen und zu entwickelnden Formeln sind theoretisch streng genommen nur bei querkraftfreier Biegung gültig. Sie sind jedoch für praktische Fälle auch noch dann hinreichend

⁸In Abschn. 6.4 wird die Möglichkeit beschrieben, auch den Zugspannungsanteil des Betons zu berücksichtigen.

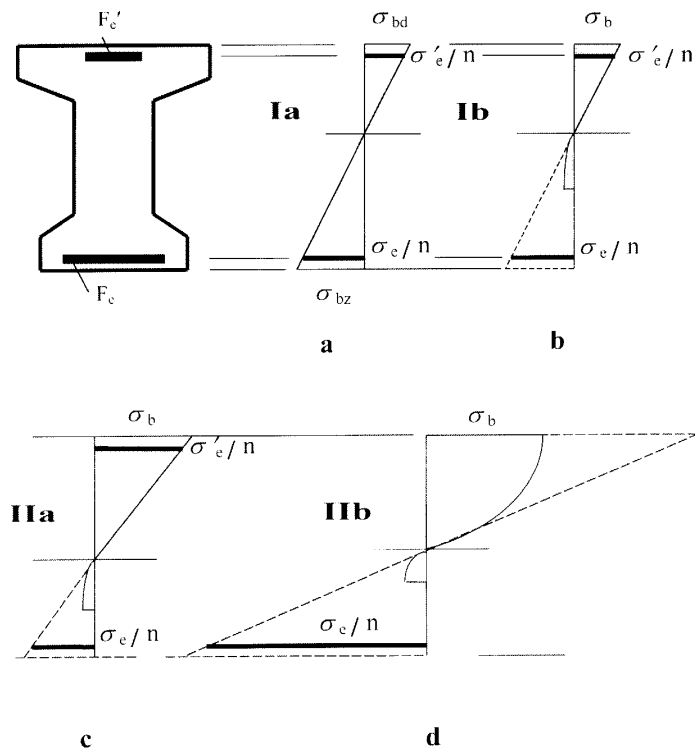


Abbildung 3: Spannungsverteilungen bei Biegung mit und ohne Längskraft

genau, wenn bei Auftreten einer Querkraft⁹ die zu berechnenden Tragglieder sehr schlank sind. In diesen Fällen weichen nämlich die Hauptspannungen nur wenig von der Richtung der Normalspannungen ab. Dieses ist durch Dehnungsmessungen schon von BRANDTZÆG [8] bestätigt worden.

Allen Berechnungen für Zustand IIa und IIb bei einachsiger Biegung mit und ohne Längskraft liegen die folgenden Gleichgewichtsbedingungen zugrunde (vergl. Abb. 4):

1. $\Sigma H = 0$:

$$Z - D_b - D_e - N = 0, \quad (1)$$

2. $\Sigma M = 0$ bezüglich des Angriffspunktes von Z :

$$M_e - D_b(h - y_D) - D_e(h - h') = 0, \quad (2)$$

3. $\Sigma M = 0$ bezüglich des Angriffspunktes von D_e :

$$M_e + (N - Z)(h - h') + D_b(y_D - h') = 0; \quad (3)$$

darin ist bekanntlich $M_e = M - N \cdot e$ (4)

und $e = h - \frac{d_o}{2}$. (5)

⁹Die Querkraft sei klein im Verhältnis zur Größe des Biegemomentes.

Mit (5) wird also stillschweigend vorausgesetzt, dass die Normalkraft auf halber Höhe des Gesamtquerschnittes angreift. Man muß sich das bei der Entwurfsarbeit und auch beim Programmieren vergegenwärtigen, denn es ist nicht selbstverständlich.

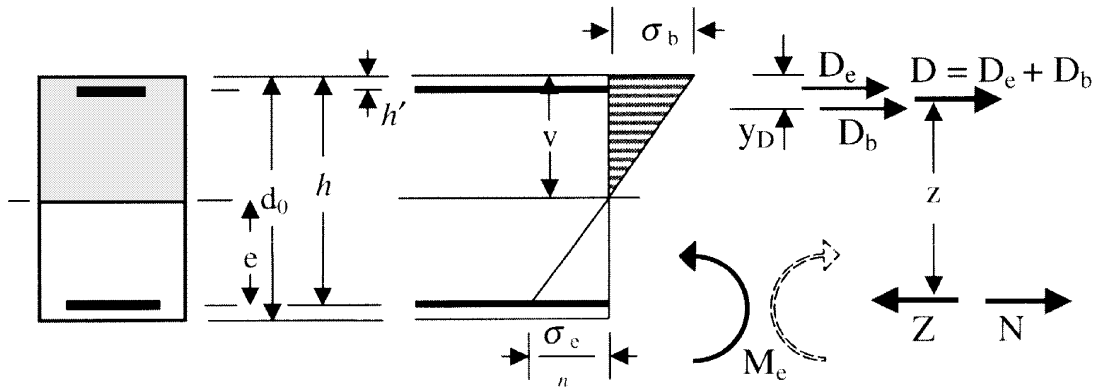


Abbildung 4: Spannungsannahmen nach DIN 4224

In Abb. 4 sind die Verhältnisse entsprechend DIN 4224 gezeigt, wie sie bei geradlinigem Spannungsverlauf, also Zustand IIa und unveränderlicher Stahlzugspannung für einen Rechteckquerschnitt (ebenso wie für beliebige Querschnitte) gelten.

Alle bislang entwickelten Methoden sollten in erster Linie wenig Arbeit bei der Handberechnung verursachen; entweder über die Bereitstellung von Tabellen, so DIN 4224, dort Abschn. 1.3212, oder durch Rechenansätze, mit denen die Ermittlung bei beliebigen Spannungsverhältnissen zwischen Beton und Stahl möglich ist und außerdem die Dimensionen nicht eingehen, weil die Funktionen normiert werden (PUCHER). Darüber hinaus wurden viele spezielle Methoden für besondere Querschnittsformen veröffentlicht. Der Grundsatz, den Arbeitsaufwand zu verringern, spielt in dieser Abhandlung zum ersten Male mit Blick auf die Anwendung von Digitalrechnern überhaupt keine Rolle. Vielmehr ist die universelle Brauchbarkeit wichtig, besonders bezogen auf alle möglichen Querschnittsformen und die Berücksichtigung beliebig verteilter Stahleinlagen, weil dann nur wenige Rechenprogramme nötig sein werden.

Die Hauptschwierigkeit bei der Weiterentwicklung aus den Formeln (1) bis (3) ist in der Bestimmung der Größe und Lage der Biegedruckkraft D_b und y_D für beliebige Querschnittsformen und beliebige Beton-Spannungsverteilungen über die Höhe der Druckzone zu sehen. Bei schiefer Biegung muß außerdem für D_b der horizontale Abstand x_D des Angriffspunktes (Resultierende) von der Bezugsachse ermittelt werden. Die Aufstellung von Beziehungen für D_b , y_D und x_D ist Gegenstand des Kap. 4. In Kap. 6 werden Wege gezeigt, möglichst schnell, genau und sicher zu der Lage der neutralen Faser zu gelangen, die bei Gleichgewicht der Kräfte am Querschnitt anliegen muß.

Am Rande sei erwähnt, dass jeder vorgespannte Betonquerschnitt sich vom schlaff bewehrten Stahlbetonquerschnitt prinzipiell nur dadurch unterscheidet, dass die Spannstähle rechnerisch bereits vor der Aufbringung der äußeren Lasten eine Dehnung durch die Spannkraft erfahren. Diese Erkenntnis ist selbstverständlich nicht neu, es wurde bereits von MÖRSCH [9, 10] und RÜSCH [12] darauf hingewiesen. Nur hatten diese Überlegungen in

Deutschland bis jetzt lediglich Bedeutung für den Bruchsicherheitsnachweis in Spannbetonsträgern. Es konnte bei der Vielzahl der Verfahren für die Bemessung leicht der Eindruck entstehen, dass für die Berechnung schlaff bewehrter Stahlbetonbalken andere Gesetzmäßigkeiten gültig sind. **Ein Spannbetonquerschnitt mit der Spannkraft 0 t wird mit den Verfahren dieser Abhandlung deshalb genauso behandelt wie ein normaler Stahlbetonquerschnitt mit nur schlaffer Bewehrung.**

In der Einleitung, vergl. Abschn. 1.1, wurde die Aufgabenstellung dieser Abhandlung als eine ausschließlich mathematische umrissen. Die technologischen Eigenschaften, auf denen die Formänderungslinien des Stahls und des Betons beruhen, werden als gegeben vorausgesetzt. In Abschn. 4.1 wird dargelegt, dass jede Arbeitslinie eines Betons den Rekursionsformeln zugrunde gelegt werden kann, auch verschiedene, wenn einschlägige Untersuchungen eines Tages diese notwendig machen sollten, etwa für unterschiedliche Querschnittsformen und Belastungsarten. Diese Abhandlung liefert mit ihren Formeln lediglich ein stets einsetzbares „Handwerkszeug“.

Bei der hier gestellten Aufgabe fragt man zunächst, ob nicht von bekannten Überlegungen und Methoden ausgegangen werden kann. In der Tat haben einige Autoren Ansätze veröffentlicht, die denen in dieser Abhandlung sehr ähneln, obwohl bei ihnen eine ganz andere Zielsetzung vorlag (siehe Kap. 3). Bei keinem sind jedoch alle gewünschten Eigenschaften in den Methoden vereinigt. Meistens sind die in den Rekursionsverfahren der Abhandlung erfaßten Möglichkeiten nur angedeutet. Im folgenden werden die Überlegungen von PUCHER [7] und KANI [13] in kurzer Form wiedergegeben. Sie kommen der hier gewählten Behandlungsweise am nächsten und waren teilweise auch Vorbild. Andere Autoren sehen ihre Hauptaufgabe darin, die meistens recht komplizierten Gebilde, nämlich die Volumina, durch welche die Biegedruckkräfte jeweils darstellbar sind, in für eine Handrechnung einfach ermittelbare geometrische Formen zu bringen und trotzdem die wirklichen Verhältnisse möglichst gut zu treffen. Alle Vorschriften und Empfehlungen der verschiedenen Länder basieren auf diesem Gedanken.

Die Ableitungen von PUCHER können in [7], Abschn. Cq2 und Cq3 nachgelesen werden. Die Formänderungslinien des Betons stellt PUCHER dar mit den Beziehungen $\varepsilon_b = \varphi \varepsilon_B$ und $\sigma_b = \bar{\varphi} \sigma_B$, wo $\bar{\varphi} = \frac{\sigma_b}{\sigma_B} = \bar{\varphi}(\varphi)$ ist. Die Funktion $\bar{\varphi}(\varphi)$ entspricht der in Abschn. 4.3.1 eingeführten Beziehung $\sigma_{(\eta)}$. Die Form des Querschnittes wird bei PUCHER in Abhängigkeit von u dargestellt durch

$$b_{(u)} = B \frac{b_{(u)}}{B}, \quad (6)$$

Abb. 5 ist dem genannten Abschnitt bei PUCHER in [7] entnommen und läßt die Bedeutung der vorstehenden Beziehungen und Größen erkennen.

In Abschn. 5.2 wird gezeigt werden, dass die Integration über die Höhe der Druckzone bei PUCHER auf längerem Wege als dem vom Autor gewählten zum Ziele führt. Grundsätzlich ist das selbstverständlich kein Hindernis, die PUCHERSchen Ansätze zu verwenden. Ebenso wie es reine Formsache ist, ob man den Ursprung für die Variable u wie PUCHER auf die neutrale Faser legt oder auf den oberen Druckrand, wie es hier geschehen wird; allerdings hat der letzte Aspekt für die Aufstellung von Rechenprogrammen einschneidende Bedeutung.

Die Verallgemeinerungen PUCHERS reichen jedoch für die hier aufgestellte Aufgabe nicht aus, weil (6) selbstverständlich einen einachsigen symmetrischen Querschnitt voraussetzt. Eine solche Einschränkung ist aber nicht nur hinderlich bei einigen Fällen mit einachsiger Biegung, sondern macht auch die Verwendung der angestrebten Rekursionsformeln für die Berechnung einer Resultierenden der Biegedruckkraft mit den zugehörigen Abständen von den Bezugsachsen bei schiefer Biegung vollkommen unmöglich. Denn selbst bei rechteckiger Druckzonenfläche eines Querschnittes wird

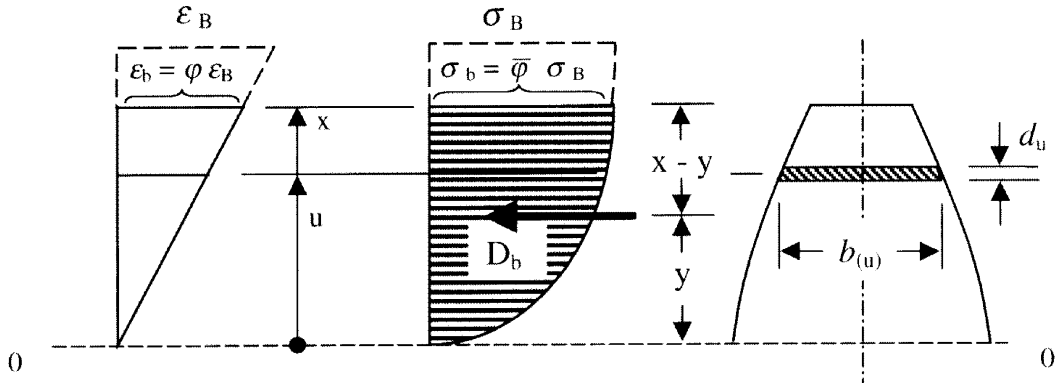


Abbildung 5: Spannungsannahmen bei PUCHER

diese sofort unsymmetrisch, wenn die neutrale Faser nicht mehr parallel zum oberen Druckrand verläuft. Die Methode PUCHERS erlaubt es aber im Gegensatz zu der von KANI [13], dort Kap. X, die Spannungsfunktion in ihrem gültigen Bereich mit dem richtigen Völligkeitsgrad zu berücksichtigen. Geometrisch heißt das, die Darstellung der Funktion $\sigma_b = \bar{\varphi} \cdot \sigma_B$ in Abb. 5 wird soweit über den Druckrand hinaus verzerrt, bis die Ordinate σ_b mit der vorhandenen Druckspannung übereinstimmt. Bei Handrechnungen wird die sich daraus ergebende Änderung des Völligkeitsgrades aus Gründen der Berechnungsvereinfachung häufig nicht berücksichtigt. Bei der Beurteilung des Berechnungsvorschlages von KANI für den Bruchsicherheitsnachweis im Spannbeton wird am Ende dieses Kapitels anhand einer Gegenüberstellung gezeigt, dass der Einfluß im allgemeinen tatsächlich unerheblich ist.¹⁰

Wie bereits betont, war PUCHERS Anliegen sicherlich nicht die Schaffung eines Verfahrens wie das hier angestrebte. Er wollte vielmehr für die Handrechnung ein Tabellenhilfsmittel schaffen, das in ähnlicher Weise benutzbar sein sollte wie die Tabellen für die „n-Verfahren“. Das Problem der Auffindung der richtigen Lage der Nulllinie wurde von ihm deshalb über das Suchen von passenden Tabellenwerten oder mit Hilfe von Kurvenscharen bewältigt – für die manuelle Arbeit sicher die beste Lösung.

Ganz anders liegen die Verhältnisse bei dem Verfahren zur Ermittlung der Bruchsicherheit von KANI [13]. Obwohl es für die Handrechnung gedacht ist, lassen sich Tabellen nur bedingt aufstellen, weil nämlich bei ihm eine Symmetrie der Querschnitte, überhaupt eine Beschränkung auf eine Querschnittsform, nicht gefordert wird. Dass die Methode von KANI sich selbstverständlich auch für den Nachweis des Tragvermögens bzw. die Bemessung eines schlaff bewehrten Traggliebes anwenden läßt, wurde bereits betont.

KANI zerlegt die Biegedruckfläche einer ersten Näherung in kleine Rechtecke und läßt auf sie die Spannungen wirken, die er über jeweils gültige Völligkeitsgrade dieser Teilrechtecke aus einer Funktion entnimmt. Diese Funktion ist je nach dem Verlauf der Formänderungslinie des Betons verschieden. Nach Summierung der so erhaltenen Teilkräfte ergibt sich die Beton-Biegedruckkraft, die aber normalerweise mit den übrigen inneren und evtl. auch äußeren Kräften noch nicht im Gleichgewicht steht. Es muß deshalb eine Verbesserung der Nulllinienlage vorgenommen und die Rechnung so oft, wie die Genauigkeitsansprüche es erfordern, wiederholt werden. Bei unveränderlicher Stahlzugspannung bleibt die Lage der Zugzone Z konstant. In allen anderen Fällen ist auch

¹⁰... bereits von RÜSCH in „Beton- und Stahlbeton“ 45 (1950) S. 219, Abschn. 7.31 angegeben.

sie bei jedem Iterationsschritt für die Auffindung der endgültigen Nulllinie neu zu berechnen. Die Rekursionsverfahren dieser Arbeit basieren auf den gleichen Ansätzen.

KANI hat jedoch die Entwicklung nur bis zu einer „Differenzenmethode“ geführt, während sie hier über eine geschlossene Integration, mit gleichzeitiger Einschließung der *affinen Verzerrung*¹¹ der Beton-Spannungsfunktion bei $\sigma_b < \max\sigma_b$ (Bezeichnung bei KANI), zu expliziten Formeln für die Biegedruckkraft D_b und die Druckkraftabstände y_D und x_D gelangt. Die Bestimmung der Nulllinie wird grundsätzlich ähnlich wie bei KANI [13], Abschn. X-113 vorgenommen. Allerdings ist die automatische Durchführung der Druckkraft-Korrektur in einem digitalen Rechenautomaten erheblich komplizierter.

Im letztgenannten Abschnitt bei KANI ist in Absatz α) die Formel angegeben¹²:

$$\Delta D = \max\sigma_b \cdot \alpha_m \cdot b_x \cdot \Delta x .$$

Die Schwierigkeit einer Auswertung derselben ist hauptsächlich darin zu sehen, dass die Breite b_x in Höhe der jeweiligen Nulllinie, die genau eine mittlere Breite des noch unbekanntes Bereiches Δx sein müßte, bei einem beliebigen Querschnitt nur auf Umwegen automatisch bestimmt werden kann. Die Iterationsvorschrift ist darum auch erheblich umständlicher, wenn sie programmierbar sein soll.

Bei KANI ist auf S. 479 ein Beispiel durchgerechnet worden, in dem die Verformung des Spannstahles für die Bruchsicherheit maßgebend ist. An diesem Beispiel läßt sich anhand einer Parallelrechnung gut erkennen, dass das veränderliche Völligkeitsmaß für die Spannungsverteilung auf der Biegedruckfläche normalerweise einen vernachlässigbar kleinen Einfluß auf das Endergebnis hat. Die Vergleichsrechnung wurde in dieser Arbeit nach der Vorlage bei KANI von Hand durchgeführt und ließ erkennen, dass der Rechenaufwand schon dann recht groß ist, wenn nur mit unveränderlicher Spannungsverteilung gerechnet wird, also mit den Diagrammen bei KANI auf S. 468. Da in der Parallelrechnung das Spannungsdiagramm mit abnehmender Randdehnung weniger völlig werden mußte, waren bei jedem der zwei notwendigen Iterationsschritte neue Diagramme für σ und α zu bilden, ein unverhältnismäßig großer Aufwand. Die dabei gewonnenen Ergebnisse lauten: $x = 0,27 m$, gegenüber $0,24 m$ bei KANI und $\max\epsilon_b = 1,16 \text{ ‰}$ anstatt $1,01 \text{ ‰}$; das aufnehmbare Bruchmoment verringert sich von 409 auf 403 Mpm.

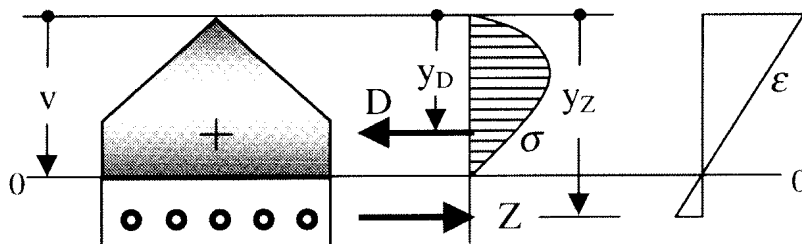


Abbildung 6: Spitze Ecke am Druckrand

¹¹Dieser Begriff wurde von PUCHER [7] geprägt und hier übernommen, siehe dort S. 104.

¹²Druckfehler im Buch von KANI in der Auflage 1955.

Allerdings gibt es Querschnittsformen, beispielsweise wie in [Abb. 6](#) dargestellt, bei denen der Fehler unter besonderen Umständen zu groß werden kann. Derartig „eckige Situationen“ entstehen fast immer bei schiefer Biegung. Man sollte jedoch nicht vergessen, dass für dementsprechende Querschnitte mit Sicherheit andere Spannungsfunktionen für den Beton anzusetzen sind ([Abb. 6](#)) und die Berechnung schon deshalb meistens fehlerhaft wird, weil die passenden Arbeitslinien entweder nur mit beschränkter Genauigkeit vorliegen oder gar fehlen und geschätzt werden müssen.

Wie sich in [Kap. 4](#) erweisen wird, ist es relativ einfach, das Spannungsdiagramm in einer der tatsächlichen Randdehnung entsprechenden Form in Ansatz zu bringen. Auch erscheint die Berücksichtigung allein darum als zweckmäßig, weil bei der genauen Zahlenbehandlung in den Digitalrechnern mittels der Rekursionsformeln die **Ursachen aller Unstimmigkeiten dann ausschließlich auf die von außen in die Berechnung eingebrachten Spannungsfunktionen lokalisiert** werden können.

Die Verhältnisse der schiefen Biegung sind nach den Ansätzen von KANI nicht erfaßbar. Zumindest müßten letztere ergänzt werden, um den Abstand der resultierenden Biegedruckkraft von der vertikalen Achse bestimmen zu können. Es ist leicht einzusehen, dass durch solche Zusätze der Handrechenaufwand nicht mehr vertretbar sein würde.

4 Entwicklung des Rekursionsverfahrens

In einer isometrischen Darstellung (Abb. 7) soll die in diesem Kapitel zu behandelnde Aufgabe veranschaulicht werden. Es geht um die Berechnung des Körpervolumens, welches durch die Biegedruckfläche, die auf der Umrandung dieser Fläche senkrecht stehenden Ebenen und die parallel zur Querschnittsebene projizierte Spannungsfunktion eingegrenzt wird. Dieses Volumen versinnbildlicht die ganze Biegedruckkraft, die infolge Beanspruchung durch Biegung oder Biegung mit Längskraft entsteht und mit der inneren Zugkraft und der evtl. vorhandenen äußeren Längskraft im Gleichgewicht stehen muß. Außerdem muß die genaue Lage des Angriffspunktes der in einer Resultierenden zusammengefaßten Kraft D_b gefunden werden. Als Parameter für die Berechnung

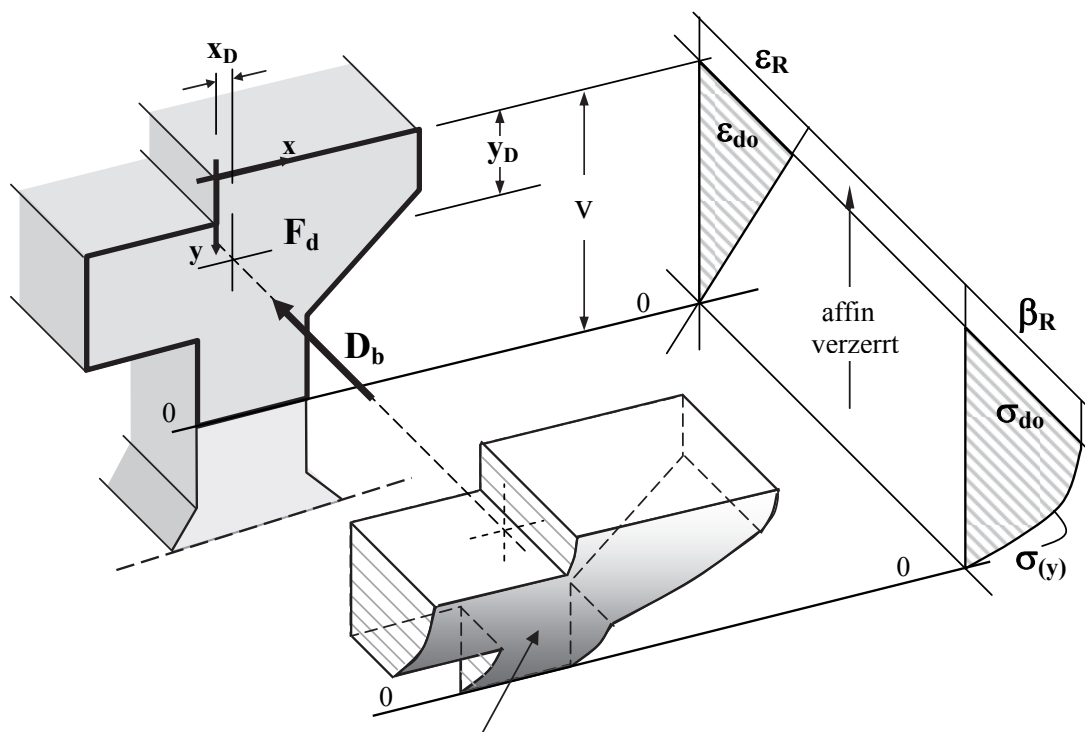


Abbildung 7: Volumen des Druckkraft-Körpers

des Druckkraftkörpers sollen folgende Größen genügen:

1. die **Koordinaten** der Druckflächen-Eckpunkte in einem System, dessen Ursprung auf *der* Ecke oder Kante des Querschnittes liegt, wo die größten Druckspannungen und Dehnungen (Kürzungen) entstehen, siehe Abb. 7;
2. sollen die **Koeffizienten** der Spannungs-Ersatzfunktion des Betons bekannt sein. Vergleiche haben ergeben, dass die Verwendung transzendenter Funktionen keine einfachere Möglichkeit zur expliziten Formulierung von $\sigma(y)$ bietet als eine Interpolation – in Abschn. 5.1 wird das begründet;
3. braucht man noch den **Grenzwert** für die Randkürzung ε_R und den tatsächlich am Druckrande erscheinenden Kürzungswert ε_{do} . Aus dem Quotienten $\varepsilon_{do}/\varepsilon_R$ läßt sich dann ein Maß