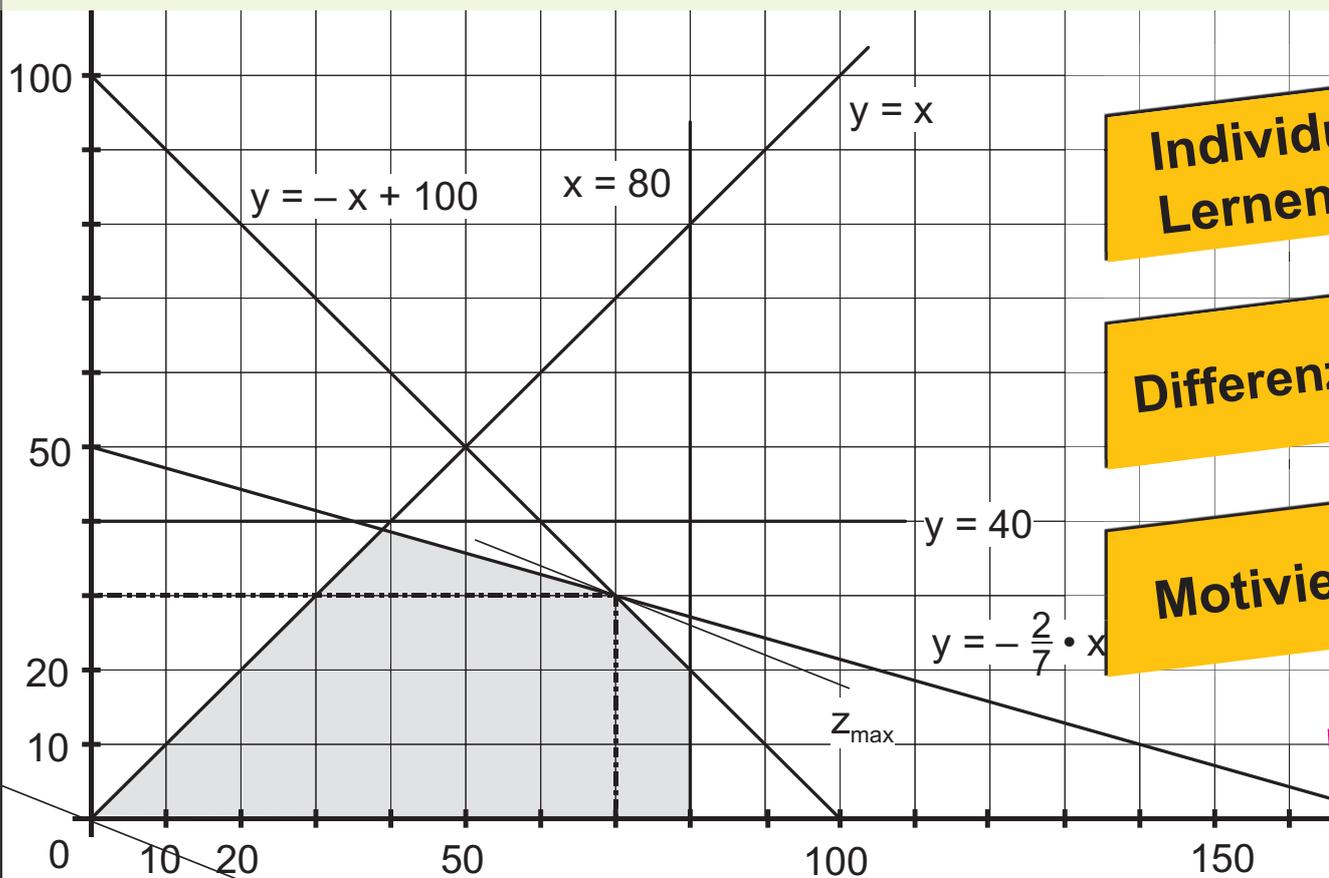


# Stationenlernen

## Lineare

# Optimierung



Individuelles  
Lernen

Differenzierend

Motivierend



- Übersichtliche Aufgabenkarten
- Schnelle Vorbereitung
- Mit Lösungen zur Selbstkontrolle



Lernen mit Erfolg

**KOHL** VERLAG

[www.kohlverlag.de](http://www.kohlverlag.de)

# Stationenlernen Lineare Optimierung

2. Digitalauflage 2016

© Kohl-Verlag, Kerpen 2015  
Alle Rechte vorbehalten.

Inhalt: Hans-J. Schmidt  
Grafik & Satz: Kohl-Verlag

**Bestell-Nr. P11 834**

**ISBN: 978-3-95686-335-6**

## [www.kohlverlag.de](http://www.kohlverlag.de)

© Kohl-Verlag, Kerpen 2016. Alle Rechte vorbehalten.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und unterliegen dem deutschen Urheberrecht. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages (§ 52 a Urhg). Weder das Werk als Ganzes noch seine Teile dürfen ohne Einwilligung des Verlages eingescannt, an Dritte weitergeleitet, in ein Netzwerk wie Internet oder Intranet eingestellt oder öffentlich zugänglich gemacht werden. Dies gilt auch bei einer entsprechenden Nutzung in Schulen, Hochschulen, Universitäten, Seminaren und sonstigen Einrichtungen für Lehr- und Unterrichtszwecke.

Der Erwerber dieses Werkes in PDF-Format ist berechtigt, das Werk als Ganzes oder in seinen Teilen für den Gebrauch und den Einsatz zur Verwendung im eigenen Unterricht wie folgt zu nutzen:

- Die einzelnen Seiten des Werkes dürfen als Arbeitsblätter oder Folien lediglich in Klassenstärke vervielfältigt werden zur Verwendung im Einsatz des selbst gehaltenen Unterrichts.
- Einzelne Arbeitsblätter dürfen Schülern für Referate zur Verfügung gestellt und im eigenen Unterricht zu Vortragszwecken verwendet werden.
- Während des eigenen Unterrichts gemeinsam mit den Schülern mit verschiedenen Medien, z.B. am Computer, via Beamer oder Tablet das Werk in nicht veränderter PDF-Form zu zeigen bzw. zu erarbeiten.

Jeder weitere kommerzielle Gebrauch oder die Weitergabe an Dritte, auch an andere Lehrpersonen oder pädagogischen Fachkräfte mit eigenem Unterrichts- bzw. Lehrauftrag ist nicht gestattet. Jede Verwertung außerhalb des eigenen Unterrichts und der Grenzen des Urheberrechts bedarf der vorherigen schriftlichen Zustimmung des Verlages. Der Kohl-Verlag übernimmt keine Verantwortung für die Inhalte externer Links oder fremder Homepages. Jegliche Haftung für direkte oder indirekte Schäden aus Informationen dieser Quellen wird nicht übernommen.

Station	Stationsname	Seite	●	!★	E/P	benötigte Materialien
1	Zur Information: Was du über Lineare Optimierung wissen musst	9	●		E	Heft, Bleistift, Papier
2	Zur Information: Hinführung zum Erfüllungsvieleck	13	●		E	Hinführung zum Erfüllungsvieleck: Aufgabe 1, Heft, Bleistift, Papier
3	Hinführung zum Erfüllungsvieleck: Aufgabe 1	16	●		E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
3	Hinführung zum Erfüllungsvieleck: Aufgabe 2	17	●		E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
3	Hinführung zum Erfüllungsvieleck: Aufgabe 3	19	●		E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
3	Hinführung zum Erfüllungsvieleck: Aufgabe 4	21	●		E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
3	Hinführung zum Erfüllungsvieleck: Aufgabe 5	23		!	E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
3	Hinführung zum Erfüllungsvieleck: Aufgabe 6	25		!	E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
3	Hinführung zum Erfüllungsvieleck: Aufgabe 7	27		!	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
3	Hinführung zum Erfüllungsvieleck: Aufgabe 8	29		★	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
3	Hinführung zum Erfüllungsvieleck: Aufgabe 9	31		★	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
4	Zur Information: Maximumaufgaben	33	●		E	Heft, Bleistift, Papier, Maximumaufgabe 1
5	Maximumaufgabe 1	36	●		E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
5	Maximumaufgabe 2	37	●		E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
5	Maximumaufgabe 3	39	●		E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
5	Maximumaufgabe 4	41	●		E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
5	Maximumaufgabe 5	43		!	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
5	Maximumaufgabe 6	45	●		P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier

Station	Stationsname	Seite	● ! ★	E/P	benötigte Materialien
5	Maximumaufgabe 7	47	●	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
5	Maximumaufgabe 8	49	!	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
5	Maximumaufgabe 9	51	!	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
5	Maximumaufgabe 10	53	!	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
5	Maximumaufgabe 11	55	!	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
5	Maximumaufgabe 12	57	★	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
5	Maximumaufgabe 13	59	★	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
5	Maximumaufgabe 14	61	★	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
6	Zur Information: Minimumaufgaben	63	●	E	Heft, Bleistift, Papier, Minimumaufgabe 1
7	Minimumaufgabe 1	64	!	E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
7	Minimumaufgabe 2	65	!	E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
7	Minimumaufgabe 3	67	!	E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
7	Minimumaufgabe 4	69	!	E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
7	Minimumaufgabe 5	71	!	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
7	Minimumaufgabe 6	73	!	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
7	Minimumaufgabe 7	75	!	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
7	Minimumaufgabe 8	77	★	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
7	Minimumaufgabe 9	79	★	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier

Station	Stationsname	Seite	!★	E/P	benötigte Materialien
7	Minimumaufgabe 10	81	★	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
8	Zur Information: Aufgaben mit drei Variablen	83	!	E	1. Aufgabe mit drei Variablen, Heft, Bleistift, Papier
9	1. Aufgabe mit drei Variablen	84	!	E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
9	2. Aufgabe mit drei Variablen	85	!	E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
9	3. Aufgabe mit drei Variablen	87	★	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
9	4. Aufgabe mit drei Variablen	89	★	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
9	5. Aufgabe mit drei Variablen	91	★	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
10	Zur Information: Transportprobleme	93	!	E	Transportproblem 1 Heft, Bleistift, Papier
11	Transportproblem 1	97	!	E	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
11	Transportproblem 2	99	★	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
11	Transportproblem 3	103	★	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier
11	Transportproblem 4	107	★	P	Geodreieck, Heft, Bleistift, Papier

# Anleitung

Sehr geehrte Kollegen und Kolleginnen,  
dieses Werk zum Stationenlernen „Lineare Optimierung“ soll Ihnen Ihre alltägliche Arbeit erleichtern. Dabei war es uns besonders wichtig, Stationen zu kreieren, an denen man die wesentlichen Eigenschaften der Linearen Optimierung erarbeiten kann. Die meisten Lehrwerke beschränken sich bei der Behandlung des Themas auf einige wenige Aufgaben. Um eine ausführlichere Behandlung dieses interessanten Stoffgebietes zu ermöglichen, wurde diese Aufgabensammlung erstellt. Sie beinhaltet

- 9 Aufgaben „Hinführung zum Erfüllungsvieleck“
- 14 Maximumaufgaben
- 10 Minimumaufgaben
- 5 Aufgaben mit drei Variablen und
- 4 Transportprobleme.

Die Reihenfolge der Stationen ist festgelegt. Innerhalb der Stationen 3, 5, 7, 9 und 11 muss die jeweilige Aufgabe 1 zuerst bearbeitet werden, weil die Lösungen dieser Aufgaben in Stationen 2, 4, 6, 8 und 10 ausführlich erläutert werden und leicht von den Schülern und Schülerinnen nachvollzogen werden können. Sollten die Erklärungen nicht ausreichen, so empfiehlt sich, von den entsprechenden Aufgaben Arbeitstransparente zu ziehen, mit deren Hilfe der Lösungsweg vom Lehrer erarbeitet werden kann. Danach können die weiteren Aufgaben in den Stationen in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden.

Niveaustufen:

Innerhalb der Stationen gibt es drei unterschiedliche Niveaustufen, die mit ● (leicht), ! (mittel) oder ★ (schwer) markiert sind. Die mit einem Stern gekennzeichneten Stationen sind für Experten, die mit ● gekennzeichneten Stationen sollen von allen Schülern bearbeitet werden. Die Expertenaufgaben enthalten vertiefende oder weiterführende Inhalte. Selbstverständlich können Sie je nach Leistungsstand Ihrer Klasse problemlos Stationen anders kennzeichnen, indem Sie ●, ! oder ★ übermalen und anders kennzeichnen.

Lösungen:

Wer die Aufgaben der Schüler korrigiert, hängt zum einen von der Lerngruppe und zum anderen von den Vorlieben des unterrichtenden Lehrers ab. So können Sie die Verbesserung der Schüleraufgaben selbst übernehmen, oder diese Aufgabe in die Verantwortung der Kinder übergeben. In diesem Fall haben Sie die Möglichkeit, die einzelnen Aufgaben nebst der Lösung auf der Rückseite zu kopieren und den Schülern somit die Selbstkontrolle zu ermöglichen. Alternativ können Sie auch nur die Aufgaben kopieren und die Lösungen, für die Schüler erkenntlich markiert, an einem passenden Ort positionieren.

Stationen-Laufzettel:

Der Stationen-Laufzettel ist so konzipiert, dass die Lehrkraft oder die Schüler die Stationsnummer sowie den Stationsnamen eintragen. Die Kinder haken dann ab, wenn sie eine Station erledigt haben. Ein weiterer Haken wird gesetzt, wenn die Station korrigiert wurde. Dies geschieht entweder durch den Lehrer oder die Schüler selbst.

# Anleitung

Symbole

Heft



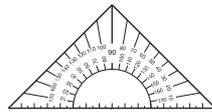
Stift/Bleistift



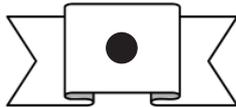
Blatt Papier



Geodreieck



Niveaustufe: leicht



Niveaustufe: mittel



Niveaustufe: schwer



Einzelaufgabe



Partneraufgabe



Nach dieser kurzen Einführung wünschen Ihnen viel Spaß beim Einsatz der Materialien

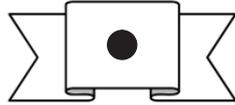
Ihr Kohl-Verlag und *Hans J. Schmidt*

Name: \_\_\_\_\_

# Stationen-Laufzettel

Datum: \_\_\_\_\_

Niveaustufe: leicht



Station	Stationsname	erledigt ✓	korrigiert ✓

Niveaustufe: mittel



Station	Stationsname	erledigt ✓	korrigiert ✓

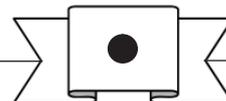
Niveaustufe: schwer



Station	Stationsname	erledigt ✓	korrigiert ✓



# Station 1



## Zur Information: Was du über Lineare Optimierung wissen musst

Lineare Optimierung, was ist das? Nun, es ist ein Anwendungsgebiet der Mathematik. Entwickelt wurde dieser Bereich in den letzten 80 Jahren, um Probleme der Volkswirtschaft zu lösen und Verfahren bei der Herstellung von Waren zu beschleunigen. Ein Beispiel zeigt dir, was damit gemeint ist.

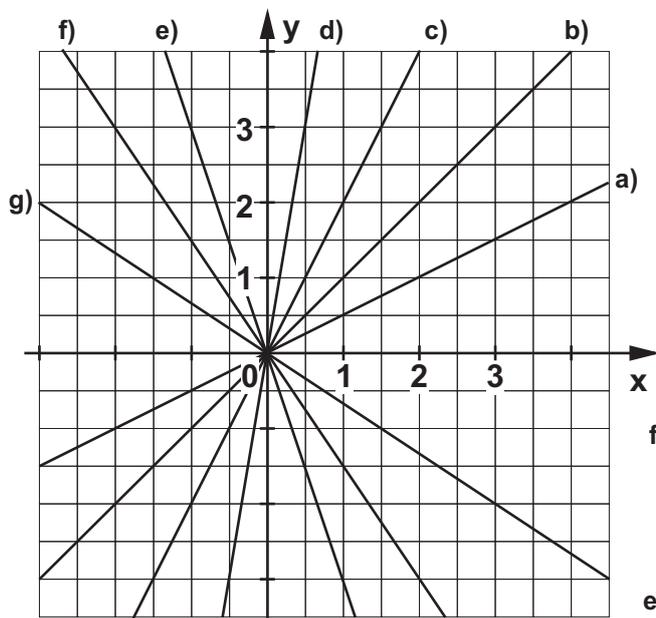
Ein landwirtschaftlicher Großbetrieb in Ungarn erntete auf 2146 Hektar Land (1 Hektar sind 10 000 m<sup>2</sup>) Gerste, Hafer, Mais und Erbsen. Damit wurde das Vieh gefüttert. Als man daran ging, den Anbau nach Gesichtspunkten der Linearen Optimierung zu verbessern, konnte man die Herstellungskosten um 17 % senken und 147 Hektar Land „einsparen“. Dennoch erntete man die gleiche Menge. Das ist doch schon etwas, oder?

Anfangs schenkte man den Forschungsarbeiten der Mathematiker wenig Beachtung. Als aber die wirtschaftlichen und technischen Verfahren immer komplizierter wurden, wuchs die Bedeutung der Linearplanung zunehmend. Heute gibt es fast kein Gebiet der Praxis mehr, bei dem man ohne die Lineare Optimierung auskommen kann. Ob man nun den Bau von Ölraffinerien plant oder Probleme löst, wie man möglichst kostengünstig Güter von A nach B transportiert, immer wird man Optimierungsverfahren benötigen.

Damit du dir einen Begriff von diesem Gebiet machen kannst und über die Art und Weise, wie man die Aufgaben anpackt, dafür ist das Stationenlernen „Lineare Optimierung“ gedacht. Allerdings kommt man in der Praxis mit den hier beschriebenen Verfahren nicht sehr weit, weil in den heutigen Anwendungen schnell Hunderte Variable und zigtausend (Un-)gleichungen auftauchen, die sich nur mit Hilfe von Großcomputern rechnen lassen.

Bevor du allerdings mit dem „Stationenlernen“ loslegen kannst, solltest du wissen, welche mathematischen Sachverhalte du beherrschen musst.

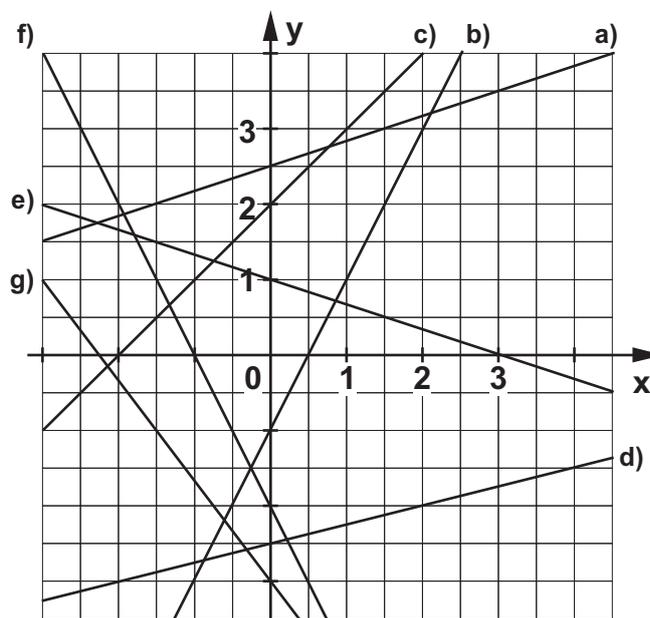
Also, wie lauten die Funktionsgleichungen der hier eingezeichneten linearen Funktionen?



$$\begin{aligned} x \cdot \frac{3}{2} - 1 &= y & \text{(g)} \\ x \cdot 5 - 1 &= y & \text{(f)} \\ x \cdot 3 - 3 &= y & \text{(e)} \\ x \cdot 9 &= y & \text{(d)} \\ x \cdot 2 &= y & \text{(c)} \\ x &= y & \text{(b)} \\ x &= 0,5 \cdot x & \text{(a)} \end{aligned}$$

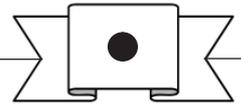
$$\begin{aligned} \frac{3}{4} - x &= y & \text{(g)} \\ 2 - x \cdot 2 &= y & \text{(f)} \\ 1 + x \cdot \frac{3}{1} &= y & \text{(e)} \\ \frac{4}{1} \cdot x - 2,5 &= y & \text{(d)} \\ 2 + x \cdot 1 &= y & \text{(c)} \\ 1 - x \cdot 2 &= y & \text{(b)} \\ \frac{3}{1} \cdot x + 2,5 &= y & \text{(a)} \end{aligned}$$

Wenn du diese Funktionsgleichungen ohne Probleme bestimmt hast, dann wirst du sicherlich auch die Funktionsgleichungen angeben können für die sieben linearen Funktionen, die nicht durch den Ursprung verlaufen.



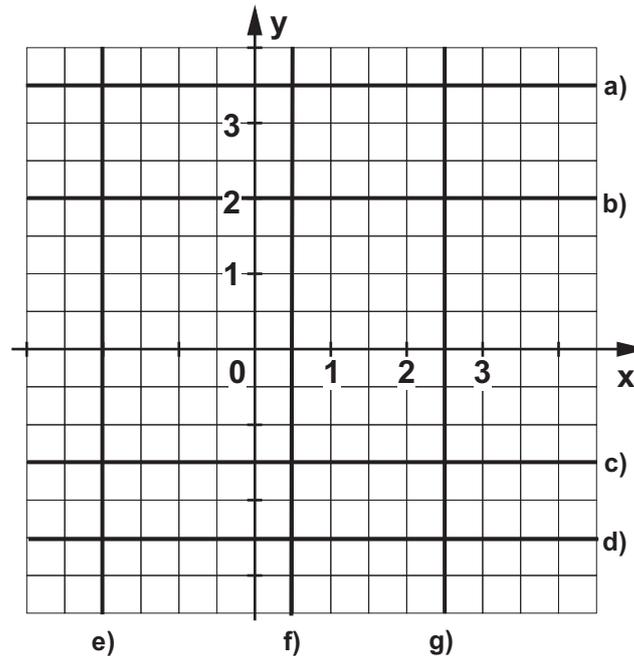


# Station 1



## Zur Information: Was du über Lineare Optimierung wissen musst

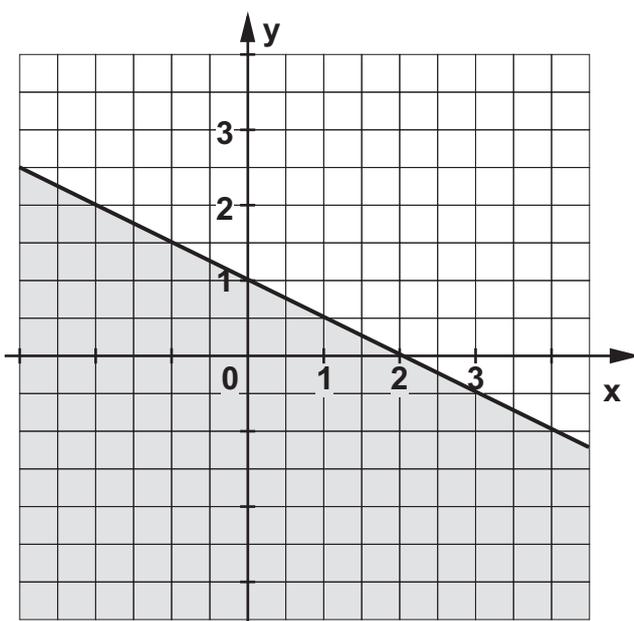
Geschafft? Dann kommen jetzt nur noch ein paar Spezialfälle. Wie lauten die Gleichungen für die Geraden, die parallel zur x- bzw. y-Achse verlaufen?



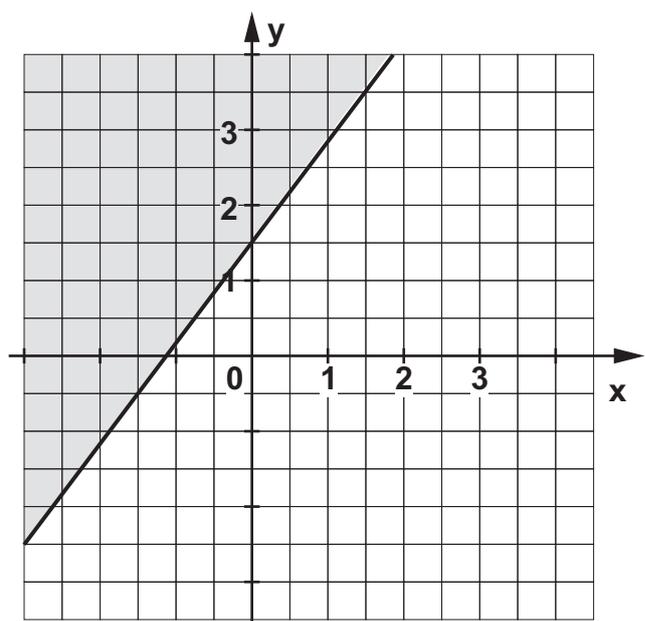
- a)  $y = 3,5$
- b)  $y = 2$
- c)  $y = -1,5$
- d)  $z = -x$
- e)  $z = -x$
- f)  $z = 0$
- g)  $z = x$

Wenn du diese drei Aufgaben ohne Schwierigkeiten bewältigt hast, dann wird der „Rest“ eigentlich sehr einfach für dich. Denn aufgrund dieser drei Aufgaben und ein wenig Denkvermögen werden dir die folgenden Erläuterungen einsichtig sein. Es lassen sich nämlich nicht nur Geraden im Koordinatensystem darstellen, sondern auch Gebiete, sogenannte „Halbebenen“.

Nimm z. B. die Funktionsgleichung  $y = -0,5 \cdot x + 1$ . Ändert man das Gleichheitszeichen um in  $\leq$ , so erfasst man damit zusätzlich die Punkte im Koordinatensystem, die unterhalb der Geraden  $y = -0,5 \cdot x + 1$  liegen. Wird aus dem Gleichheitszeichen ein  $\geq$  - Zeichen, sind damit zusätzlich alle Punkte oberhalb der Geraden markiert. Alles Müller, oder?



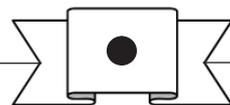
$$y \leq -0,5 \cdot x + 1$$



$$y \geq \frac{4}{3} \cdot x + 1,5$$



# Station 1



## Zur Information:

### Was du über Lineare Optimierung wissen musst

Auf diese Art und Weise lassen sich Vielecke im Koordinatensystem darstellen. Man nimmt entsprechende Ungleichungen, verbindet sie durch „UND“, fertig ist z. B. ein Fünfeck, für das gilt:

$$y \geq -1,5 \quad \text{und}$$

$$x \geq -2 \quad \text{und}$$

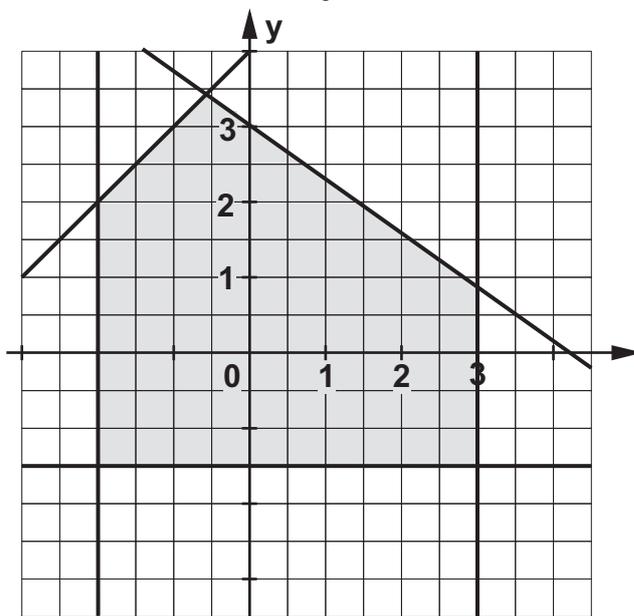
$$x \leq 3 \quad \text{und}$$

$$y \leq 1 \cdot x + 4 \quad \text{und}$$

$$y \leq -\frac{5}{7} \cdot x + 3$$

Mathematisch kürzt man das z. B. so ab:

$$\left| \begin{array}{l} y \geq -1,5 \\ x \geq -2 \\ x \leq 3 \\ y \leq 1 \cdot x + 4 \\ y \leq -\frac{5}{7} \cdot x + 3 \end{array} \right|$$



Bei den Aufgaben zur Linearen Optimierung kommt es darauf an, solche Vielecke - man nennt sie auch Planungspolygone (Polygon [grch. Vieleck]) oder auch Erfüllungsvielecke - zu zeichnen. Innerhalb dieser Erfüllungsvielecke liegen nun alle Punkte, auf die die Bedingungen der Ungleichungen zutreffen. Die Gesamtheit dieser Punkte bildet die Erfüllungsmenge. Damit man aber ein Polygon zeichnen kann, muss man zunächst Ungleichungen aufstellen, die aus einem mehr oder weniger umfangreichen Text zu entnehmen sind. Das hast du sicherlich schon öfter im Mathematikunterricht mit Gleichungen gemacht. Daher zur Auffrischung zwei Denksportaufgaben:

a) Eine Flasche Wein kostet mit Korken 1,10 €. Die Flasche kostet 1 € mehr als der Korken. Was kostet die Flasche, was kostet der Korken?

Man stellt zwei Gleichungen auf.

Lösung:  $x$  sei der Preis für eine Flasche in €  
 $y$  sei der Preis für einen Korken in €

1. Gleichung:  $x + y = 1,10$

2. Gleichung:  $x - y = 1,00$

Antwortsatz: Die Flasche kostet 1,05 €, der Korken 0,05 €.

b) Frau Meier hob bei der Bank 1000 € in 50 - € - und 20 - € - Scheinen ab. Insgesamt erhielt sie 35 Scheine. Wie viele davon waren 20 - € - Scheine?

Lösung:  $x$  sei die Anzahl der 50 - € - Scheine  
 $y$  sei die Anzahl der 20 - € - Scheine

1. Gleichung:  $x + y = 35$

2. Gleichung:  $50 \cdot x + 20 \cdot y = 1000$

Antwortsatz: Frau Meier erhielt 10 Scheine zu 50 € und 25 Scheine zu 20 €.

So ungefähr läuft auch das Aufstellen von Ungleichungen ab. Nimm einmal folgende Aufgabe: „Ein Transportunternehmen will Lkw von 8 t und 12 t Tragfähigkeit kaufen, muss aber einige Dinge beachten. Die Gesamttragfähigkeit aller Lkw soll mindestens 144 t betragen. Da das Betriebsgelände nicht sehr groß ist, können nicht mehr als 22 Lkw abgestellt werden. Die Firma hat in Untersuchungen herausgefunden, dass sie mindestens 6 Lkw mit 8 t, aber höchstens 9 Lkw mit 12 t Ladefähigkeit auslasten kann.“