Mathematik

Abiturthemen

Saarland

GOS Hauptphase

Pflichtbereich

Mathematik

Abiturthemen

Saarland

GOS Hauptphase
Pflichtbereich

Abiturthemen (Saarland GOS Pflichtbereich)

Kreis und Kugel E 1.Thema
Gebrochenrationale Funktionen G 1.Thema
Vollständige Induktion E 2.Thema
Kreis und Kugel G 2.Thema

Impressum

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

TWENTYSIX – Der Self-Publishing-Verlag
Eine Kooperation zwischen der Verlagsgruppe Random House und BoD – Books on Demand

Herstellung und Verlag:
BoD – Books on Demand, Norderstedt

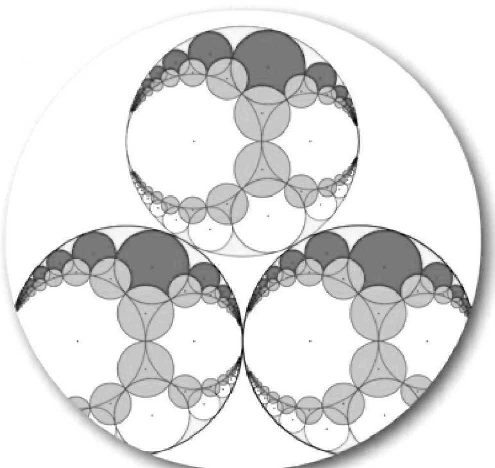
ISBN : 978-3-7407-7294-9

Inhaltsverzeichnis

1 Kreis

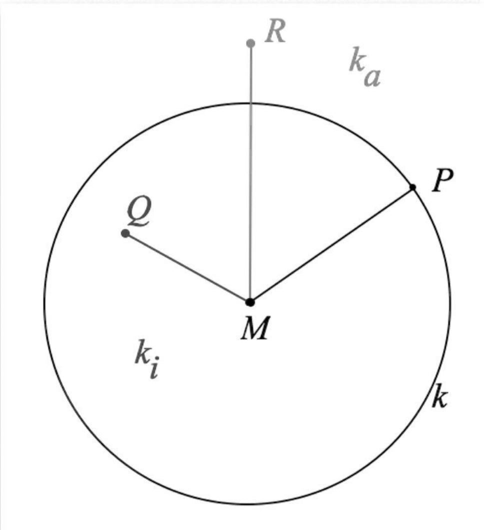
„Μή μου τοὺς κύκλους τάραττε."
„Störe meine ***Kreise*** nicht!"

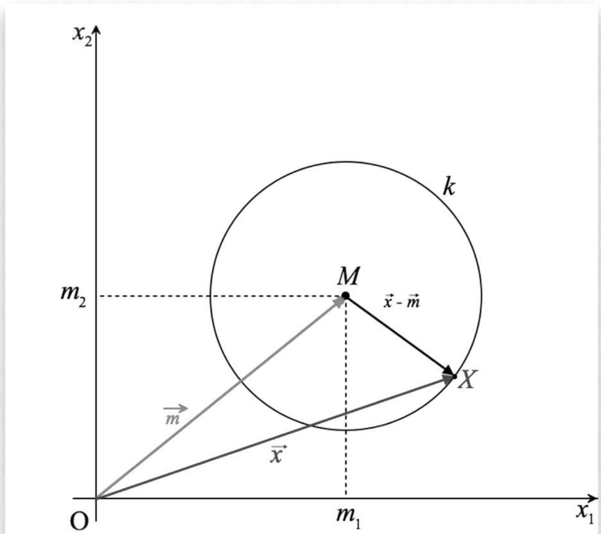
– Archimedes von Syrakus



1.1 Kreisgleichungen eines Kreises

1.1.1 Kreisgleichung in Vektorschreibweise





Kreis *k*
Die Menge aller Punkte P der Ebene, die von einem gegebenen Punkt M denselben Abstand r haben, heißt **Kreis *k*** mit dem **Mittelpunkt *M*** und dem **Radius *r***.

Bezeichnet man mit X (Ortsvektor $\vec{x}$) einen beliebigen Punkt des Kreises k in einem kartesischen Koordinatensystem, so gilt: $\overrightarrow{MX} = \vec{x} - \vec{m}$. Somit sind alle Punkte X der Ebene mit $\left|\overrightarrow{MX}\right| = \left|\vec{x} - \vec{m}\right| = r$ Punkte des Kreises k. Wegen $\left|\overrightarrow{MX}\right| = r$ ist $\left|\overrightarrow{MX}\right|^2 = r^2$. Nach Definition des Betrages eines Vektors $\vec{a}$ gilt : $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right|^2 = \vec{a}^2$. Daraus folgt die Gleichung für den Kreis k : $\left|\overrightarrow{MX}\right|^2 = \overrightarrow{MX}^2 = \left|\vec{x} - \vec{m}\right|^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\vec{x} - \vec{m}\right)^2 = r^2$.

Kreisgleichung in Vektorschreibweise

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ seien $\vec{m}$ der Ortsvektor des Mittelpunktes M („Mittelpunktsvektor“) und $\vec{x}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes X eines Kreises k mit dem Radius r. Dann gilt:

$$(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2.$$

1.1.2 Kreisgleichung in Koordinatenschreibweise

Mit der für den $\mathbb{R}^2$ (=Ebene) üblichen Koordinatenschreibweise erhält man:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}\right]^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \end{pmatrix} = r^2 .$$

Durch Ausrechnen des Skalarprodukts auf der linken Seite der Gleichung erhält man: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$.

Koordinatengleichung eines Kreises

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ wird der **Kreis *k*** mit dem Mittelpunkt $M(m_1|m_2)$ und dem Radius r durch die Gleichung

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$$

beschrieben.

Beispiel

Gegeben ist ein Kreis k in der Ebene mit dem Mittelpunkt $M(4|-1)$ und dem Radius 7. Dann lautet seine *Koordinatengleichung*:

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 + 1)^2 = 49 \text{ oder aufgelöst}$$

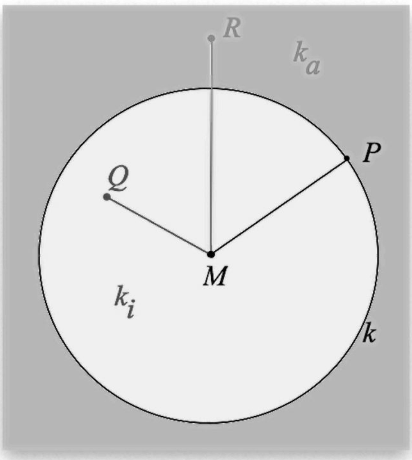
$$x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 + 2x_2 - 32 = 0.$$

Die zugehörige *Vektorgleichung* lautet:

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right]^2 = 49.$$

1.2 Punktprobe

Ist ein Kreis k (in der Ebene) mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r gegeben, so nennt man



- einen Punkt Q **inneren Punkt** des Kreises k, wenn sein Abstand zum Mittelpunkt M kleiner als der Radius r ist, wenn also
  $\left|\overline{MQ}\right| < r$ gilt; d.h. $Q \in k_i$

- einen Punkt R **äußeren Punkt** des Kreises k, wenn sein Abstand zum Mittelpunkt M größer als der Radius r ist, wenn also
  $\left|\overline{MR}\right| > r$ gilt; d.h. $R \in k_a$

Beispiel (Punktprobe)

Betrachtet werden soll noch einmal der Kreis k aus dem Beispiel von Seite 3.
$k: (x_1 - 4)^2 + (x_2 + 1)^2 = 49$ (⊙) mit $M(4|-1)$ und Radius $r = 7$.

Geprüft werden soll die Lage der Punkte $A(-8|4)$, $B(4|6)$, $C(5|3)$ und $D(10|\sqrt{13} - 1) \approx (10|2{,}6)$.

$A(-8|4)$: $\left|\overline{MA}\right| = \sqrt{(-8-4)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

$\left|\overline{MA}\right| = 13 > 7$; also liegt A außerhalb des Kreises in k_a

$B(4|6)$: $\left|\overline{MB}\right| = \sqrt{(4-4)^2 + (6-(-1))^2} = \sqrt{49} = 7 = r \Rightarrow B \in k$

$C(5|3)$: $\left|\overline{MC}\right| = \sqrt{(5-4)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \approx 4{,}12$

$\left|\overline{MC}\right| = 4{,}12 < 7$; also liegt C innerhalb des Kreises in k_i

$D(10|\sqrt{13} - 1)$: $\left|\overline{MD}\right| = \sqrt{(10-4)^2 + (\sqrt{13} - 1 - (-1))^2} = \sqrt{36+13} = \sqrt{49} = 7$

$\left|\overline{MD}\right| = 7 = r \Rightarrow D \in k$

Die Überprüfung kann auch durch Einsetzen der Punkt-Koordinaten in die Kreisgleichung (⊙) erfolgen (Punktprobe).

Aufgaben

1. Untersuchen Sie, ob die quadratische Gleichung

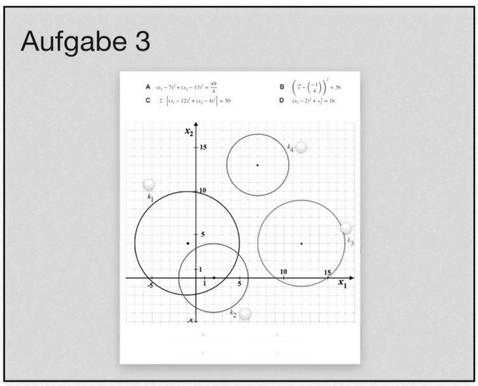
$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 - 20 = 0$$

einen Kreis in der Ebene beschreibt.
Geben Sie gegebenenfalls Mittelpunkt und Radius an.

2. Gegeben seien drei Kreise k_1, k_2 und k_3 durch ihre Mittelpunkte und Radien:
$k_1 : M_1(0|-3), r_1 = 1$; $k_2 : M_2(\sqrt{2}|2), r_2 = \sqrt{3}$; $k_3 : M_3(0|0), r_3 = 2$
a) Wie lauten die zugehörigen Kreisgleichungen in Koordinatenform?
b) Bestimmen Sie die Lage des Punktes $A(0|\ 1)$ bezüglich der drei gegebenen Kreise.

3. Ordnen Sie die Kreisgleichungen den zugehörigen Graphen von Kreisen richtig zu und begründen Sie dies.
☞ *Vorschau rechts*

☞ *Große Darstellung auf nächster Seite 6.*



Allgemein gilt für die
Lage eines Punktes bezüglich eines Kreises in der Ebene $\mathbb{R}^2$
Ein Punkt $P(p_1|p_2)$ der Ebene gehört genau dann zu dem Kreis k mit der Gleichung $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$, wenn die Koordinaten des Punktes P die Kreisgleichung erfüllen, d.h. wenn $(p_1 - m_1)^2 + (p_2 - m_2)^2 = r^2$ ist (**Punktprobe**). Gilt dagegen $(p_1 - m_1)^2 + (p_2 - m_2)^2 < r^2$ oder $(p_1 - m_1)^2 + (p_2 - m_2)^2 > r^2$, so liegt $P(p_1|p_2)$ *innerhalb* bzw. *außerhalb* des betrachteten Kreises.

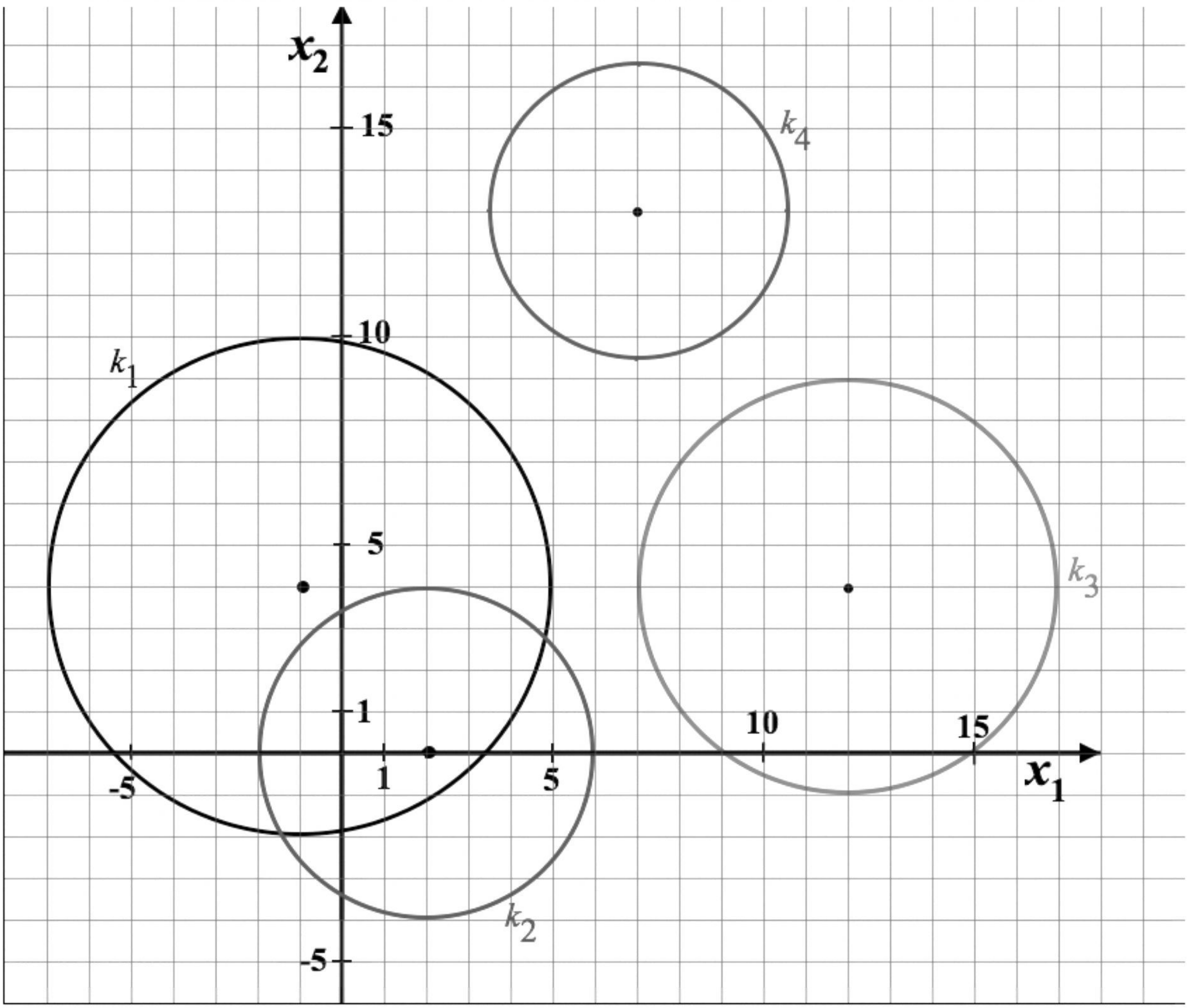
Aufgabe 3

A: $(x_1 - 7)^2 + (x_2 - 13)^2 = \frac{49}{4}$

B: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)^2 = 36$

C: $2 \cdot \left[(x_1 - 12)^2 + (x_2 - 4)^2\right] = 50$

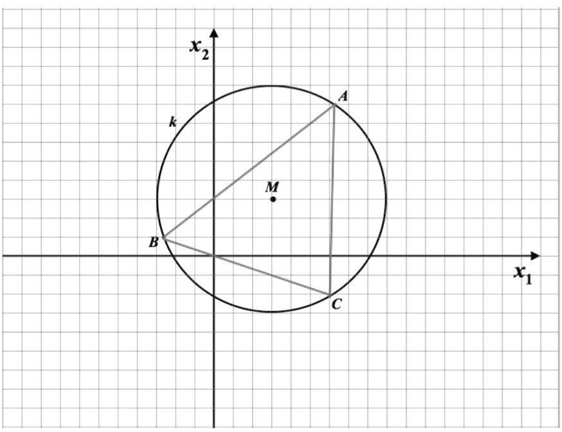
D: $(x_1 - 2)^2 + x_2^2 = 16$



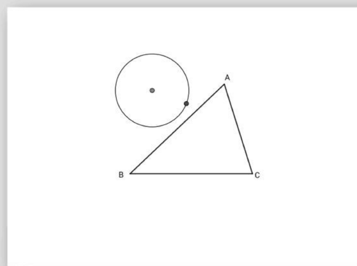
Kreis durch drei Punkte

Ein Kreis k ist durch drei verschiedene Punkte auf k eindeutig festgelegt. Betrachtet man das Dreieck, das die drei Punkte bilden, so hat das Dreieck einen eindeutigen *Umkreis*, denn der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der drei Seiten, und davon gibt es nur jeweils eine.

Aus drei verschiedenen Punkten, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, lässt sich also stets genau ein Kreis finden, auf dem die drei Punkte liegen.



Interaktiv 1.1 Umkreis



Kreis durch drei vorgegebene Punkte

GeoGebra

Es gibt also <u>keinen</u> Kreis durch drei vorgegebene Punkte der Ebene, wenn die drei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Zu drei verschiedenen Punkten, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, lässt sich also stets genau ein Kreis finden, auf dem die drei Punkte liegen.

Zeichnerisch wurde dieses Problem bereits in der Mittelstufe durch Schnitt der drei Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks, das die drei Punkte bilden, gelöst. **Rechnerisch** lässt es sich nun ebenfalls lösen.

Herleitung

fakultativ

Gegeben sei ein Kreis $k: (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$.
Äquivalent dazu ist $k: x_1^2 - 2x_1m_1 + m_1^2 + x_2^2 - 2x_2m_2 + m_2^2 = r^2$.

Nun soll zu drei gegebenen Punkten der Mittelpunkt und der Radius des zugehörigen Kreises ermittelt werden. Hierzu werden die Terme mit den unbekannten Größen (m_1, m_2 und r) auf die linke Seite und alle anderen Terme auf die rechte Seite gebracht:

$$m_1^2 + m_2^2 - r^2 - 2m_1x_1 - 2m_2x_2 = -(x_1^2 + x_2^2).$$

Setzt man nun $A := m_1^2 + m_2^2 - r^2$, $B := 2m_1$ und $C := 2m_2$, so ergibt sich:

$$A + B(-x_1) + C(-x_2) = -(x_1^2 + x_2^2) \quad (☆).$$

Da jeweils drei Zahlen-Paare x_1 und x_2 als Koordinaten der drei gegebenen Punkte und drei Unbekannte (A, B und C) vorliegen, lässt sich ein *lineares Gleichungssystem (LGS)* aufstellen, aus dem man A, B und C ermitteln kann; damit erhält man dann: $m_1 = \dfrac{B}{2}$; $m_2 = \dfrac{C}{2}$; $r^2 = m_1^2 + m_2^2 - A$.

> **Beispiel**
> Gesucht werden Mittelpunkt und Radius des Kreises, der durch die Punkte $P(-2|\,4)$, $Q(1|\,-3)$ und $R(5|\,7)$ geht.
> Aus (☆) erhält man durch Einsetzen der Koordinaten der Punkte das *LGS*:
>
> $$\begin{aligned} A + 2B - 4C &= -20 \quad (\mathrm{I}) \\ A - B + 3C &= -10 \quad (\mathrm{II}) \\ A - 5B - 7C &= -74 \quad (\mathrm{III}) \end{aligned}$$
>
> Mit einem der üblichen Lösungsverfahren erhält man: $A = -16$; $B = 6$ und $C = 4$ sowie $m_1 = \dfrac{B}{2} = 3$; $m_2 = \dfrac{C}{2} = 2$; $r^2 = m_1^2 + m_2^2 - A = 29$.
>
> Der Mittelpunkt des Kreises ist also $M(3|\,2)$ und sein Radius $r = \sqrt{29} \approx 5{,}4$.

Aufgaben

4. Geben Sie die Gleichung des Kreises an, der

a) den Radius 9 und den Mittelpunkt $M(2|8)$,
b) den Radius $\sqrt{5}$ und den Mittelpunkt $M(0{,}5|3)$ hat.

5. Gegeben ist der Kreis $k: \vec{x}^2 = 25$.
Stellen Sie fest, ob die Punkte $A(1|-3)$, $B(-3|4)$, $C(0|5)$, $D(4|4)$ auf dem Kreis, innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen.

6. Welche Gleichung hat der Kreis, der durch den Punkt A geht und den Mittelpunkt $M(-1|-3)$ hat?

a) $A(6|0)$ b) $A(-4|4)$

7. Prüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Gleichungen um Kreisgleichungen handelt. Bestimmen Sie gegebenenfalls Mittelpunkt und Radius.

a) $x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 8x_2 + 21 = 0$
b) $x_1^2 + x_2^2 - 8x_2 + 19 = 0$
c) $x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 6x_2 - 2 = 0$

8. Ein Kreis k vom Radius $r = 5$ geht durch den Punkt $A(-1|-2)$. Sein Mittelpunkt liegt auf der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie eine Mittelpunktsbestimmung durch.

In der Aufgabe 8 ergeben sich **zwei** Kreise, deren Mittelpunkte auf einer Geraden g liegen (bitte Skizze dazu anfertigen). - Betrachtet man zum Beispiel den Kreis $k_2: (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 25$, so schneidet dieser Kreis die Gerade in genau zwei Punkten. Ihre Koordinaten sollten ziemlich genau in der Skizze abgelesen werden können . Auf der folgenden Seite soll versucht werden, diese Schnittpunkte rechnerisch zu ermitteln.

Gegeben sind also ein Kreis und eine Gerade in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

$$k\colon (x_1-2)^2+(x_2-2)^2=25 \qquad \text{und}$$

$$g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+\lambda\\1-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Zu ermitteln sind die gemeinsamen Punkte von k und g.

Es bietet sich hier an, zur Lösung auf ein bekanntes Verfahren, das **Einsetzungsverfahren**, zurückzugreifen:

$k \cap g$: Einsetzen liefert:

$$(3+\lambda-2)^2+(1-\lambda-2)^2=25$$
$$\Leftrightarrow (\lambda+1)^2+(-\lambda-1)^2=25$$
$$\Leftrightarrow (\lambda+1)^2+(-(\lambda+1))^2=25$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot(\lambda+1)^2=25$$
$$\Leftrightarrow (\lambda+1)^2=\frac{25}{2}=\frac{25\cdot 2}{4}$$
$$\Leftrightarrow \lambda+1=\pm\frac{5}{2}\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1=\frac{5}{2}\sqrt{2}-1 \quad ; \quad \lambda_2=-\frac{5}{2}\sqrt{2}-1$$
$$\Rightarrow \qquad \lambda_1\approx 2{,}5 \quad ; \quad \lambda_2\approx -4{,}5$$

Daraus ergeben sich durch Einsetzen der λ-Werte in die Geradengleichung die Schnittpunkte

$$S_1(5{,}5|\,-1{,}5) \qquad\qquad S_2(-1{,}5|5{,}5)$$

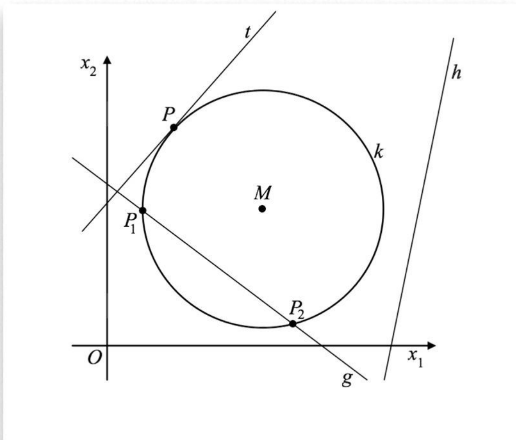
Eine Überprüfung im Bild (Skizze anfertigen zur Aufgabe 8 auf Seite 9) bestätigt die rechnerische Vorgehensweise.

❑

1.3 Lagebeziehungen ^{E}

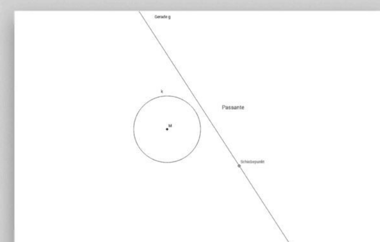
1.3.1 Lagebeziehung von Kreis und Gerade

Ein Kreis und eine Gerade haben *keinen* gemeinsamen Punkt oder *genau einen* gemeinsamen Punkt oder *genau zwei* gemeinsame Punkte.



Wenn eine Gerade *t* und ein Kreis *k* genau einen Punkt *P* gemeinsam haben, dann heißt die Gerade *t* die **Tangente an *k* im** (Berühr-)**Punkt *P***. Eine Gerade *g*, die mit *k* genau zwei verschiedene Punkte gemeinsam hat, nennt man **Sekante** von *k*; eine Gerade *h*, die mit *k* keinen Punkt gemeinsam hat, heißt **Passante**.

Interaktiv 1.2
Lagebeziehung von Kreis und Gerade



☞

Für die Lage einer Geraden zu einem Kreis gibt es also drei Möglichkeiten. So kann eine Gerade einen Kreis meiden, berühren oder schneiden. Welche der drei Lagemöglichkeiten im konkreten Fall vorliegt, kann man rechnerisch untersuchen, indem man die zugehörigen Gleichungen von Kreis und Gerade als ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten auffasst und dieses löst. Leider ist das zu lösende Gleichungssystem kein lineares.

Beispiel: Schnitt von Gerade und Kreis

Es ist die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 1 \quad \left(g: y = -\frac{1}{2}x + 1\right)$$ und des Kreises

$$k: (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 = 6{,}25$$ zu untersuchen.

$S(x_1|x_2)$ sei ein eventuell vorhandener, gemeinsamer Punkt von g und k.
Das zugehörige Gleichungssystem lautet dann:

(I) $\quad x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 1$

(II) $\quad (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 = 6{,}25$

(I) in (II) eingesetzt liefert:

$$(x_1 - 3)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + 1 - 2\right)^2 = 6{,}25$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1 - 3)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 - 1\right)^2 = 6{,}25$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1^2 - 4x_1 + 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow (x_1 - 1) \cdot (x_1 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = 1 \;\vee\; x_1 = 3$$

Durch Einsetzen der Werte von x_1 in (I) erhält man: $x_2 = \frac{1}{2}$ bzw. $x_2 = -\frac{1}{2}$

Kreis k und Gerade g schneiden sich also in den beiden Punkten:

$$S_1\left(1\middle|\frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad S_2\left(3\middle|-\frac{1}{2}\right)$$

Die Gerade g ist also eine ***Sekante*** des Kreises k.