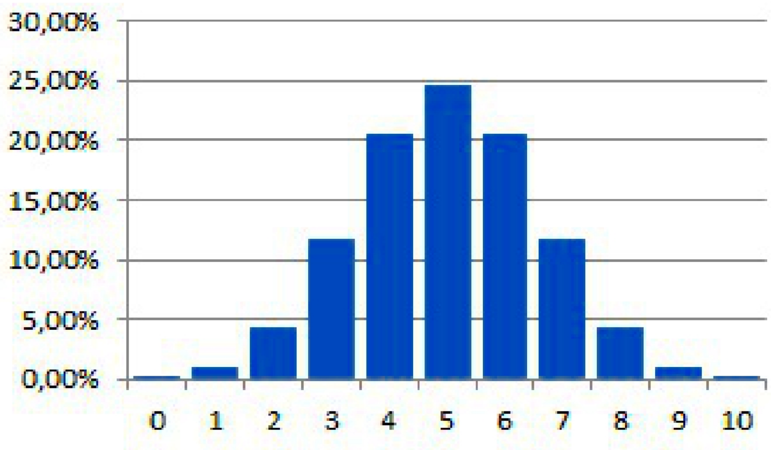
Klaus Messner

Abitur 2017 Mathematik-Training

Allgemeinbildende Gymnasien
Baden-Württemberg



www.elearning-freiburg.de

Abitur 2017
Mathematik-Training mit den Abi-Aufgaben von 2011 bis 2016

Klaus Messner

19. November 2016

Herstellung und Verlag:
BoD - Books on Demand, Norderstedt

ISBN: 978-3-7431-8542-5

Autor: Klaus Messner
klaus_messner@web.de
www.elearning-freiburg.de

Vorwort

Liebe Leserinnen, liebe Leser,

dieses Buch dient vor allem der Wiederholung. Ich möchte Ihnen zeigen, wie man an Abi-Aufgaben herangeht und sie löst. Hier steht also das Wie im Vordergrund, das Warum ist Sache des Schulunterrichts! Sie finden hier also keine Beweise, dafür umso mehr Verfahren, Formeln und viele anschauliche Beispiele und Rechen-aufgaben.
Formeln und Verfahren erkläre ich immer zuerst in kleinen einfachen Rechenbeispielen, weil es für die Schwächeren unter Ihnen wichtig ist, den grundlegenden Umgang mit Ihrem Handwerkszeug einzuüben. Falls Sie schon genügend geübt sind, können Sie sich direkt an die entsprechenden Abituraufgaben heranwagen. So erhoffe ich mir, den verschiedenen Leistungs-ständen etwa zwischen 4 und 11 Punkten gerecht zu werden.
Im vorliegenden Band werden die abiturrelevanten Themen Differenzial- und Integralrechnung und Geometrie behandelt. Weitere Themen wie „Die Bedienung des GTR“ oder „Mathematische Techniken“, die früher enthalten waren, finden Sie jetzt auf meiner Homepage. Im letzten Kapitel finden Sie Abi-Aufgaben der vergangenen Jahre zusammen mit meinen Lösungsvorschlägen. Die Lösungsvorschläge haben keinerlei offiziellen Charakter!
Auf meiner Internetseite www.elearning-freiburg.de finden Sie außerdem einige Abi-Themen, Prüfungsaufgaben und deren Lösungsvorschläge als Videovorträge sowie in ausdruckbarer Form. Hier stehen auch Materialien bereit, die im Buch nicht veröffentlicht wurden, etwa die Abi-Aufgaben früherer Jahre. Eine DVD mit Video-Tutorials und Prüfungsaufgaben können Sie über meine Internetseite auch käuflich erwerben.
Wenn Sie Anregungen haben oder Kritik üben wollen, schreiben Sie mir ein E-Mail an klaus_messner@web.de, vor allem wenn Sie irgendwo einen Fehler entdeckt haben.
Und nun liebe Leserin, lieber Leser, wünsche ich Ihnen viel Spaß beim Durcharbeiten der Lektüre, beim Üben und Verstehen und viel Erfolg in Ihrer Prüfung,

Klaus Messner

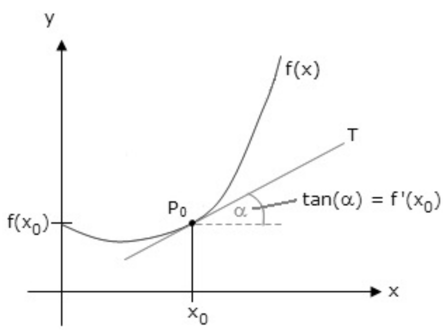
Inhaltsverzeichnis

1 Differenzialrechnung

1.1 Grundlagen

1.1.1 Begriffe und Zusammenhänge

Am Anfang der Differenzialrechnung steht die einfache geometrische Frage, wie man die Steigung der Tangente in einem beliebigen Punkt P_0 einer Funktion bestimmt. Gibt es denn in jedem Fall eine Steigung bzw. eine Tangente? Wie kann man die Gleichung der Tangente in P_0 bestimmen? In der Schule haben Sie gelernt, dass man Ableitungen bilden muss und dass die Ableitungen in einem engen Zusammenhang zu Tangenten und Steigungen stehen. Das wichtigste Handwerkszeug der Differenzialrechnung ist also das Ableiten. Es folgen ein paar grundlegende Bezeichnungen und Zusammenhänge.



Die erste Ableitung einer Funktion $f(x)$ bezeichnet man mit $f'(x)$ (gelesen: f Strich von x). Es sei nun $P_0(x_0|y_0)$ ein beliebiger Punkt auf dem Schaubild von f, dann ist $f'(x_0)$ die erste Ableitung von f in x_0. Geometrisch ist damit der Tangens des Steigungswinkels der Tangente in P_0 gemeint. Die nebenstehende Abbildung zeigt den Zusammenhang noch einmal.

Wir halten fest:

> Die erste Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion gibt den Steigungswinkel der Tangente in x_0 an, genauer gesagt, den Tangens dieses Steigungswinkels.

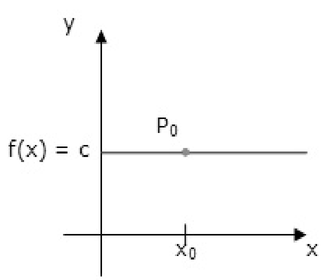
Die Erkenntnis, dass Sie mit der Ableitung einen Steigungswinkel berechnen können, ist schon eine der wichtigsten Grundlagen der Differenzialrechnung. In den nächsten beiden Abschnitten beschäftigen wir uns damit, wie man nun konkret Ableitungen bildet.

1.1.2 Ableitung elementarer Funktionen

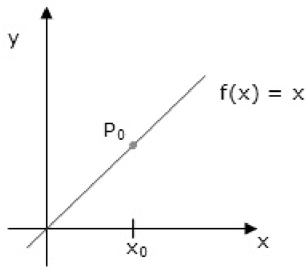
Um später allgemeine Funktionen ableiten zu können, bildet man in der Schule zunächst die erste Ableitung einiger elementarer Funktionen, beispielsweise von Potenzen und trigonometrischen Funktionen. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in der folgenden Tabelle dargestellt, die Sie möglichst auswendig lernen sollten.

f(x)	**f'(x)**
c	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

In der obigen Tabelle ist $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl, also eine beliebige Konstante. Die Ableitung einer Konstanten ist also immer 0. Wir müssen noch nicht einmal rechnen, um das einzusehen! Schauen wir uns dazu einmal das Schaubild einer konstanten Funktion $f(x) = c$ an.



Egal welchen Punkt P_0 Sie sich aussuchen, die Tangente verläuft in diesem Punkt immer waagrecht. Mit anderen Worten: Die Steigung der Tangente ist immer 0 und damit ist auch $f'(x)$ immer 0.



Auf dieselbe Weise macht man sich klar, dass für $f(x) = x$ in jedem beliebigen Punkt die Ableitung $f'(x) = 1$ ist, denn das Schaubild von $f(x)$ ist nichts anderes als die Winkelhalbierende. Deren Steigung ist $45°$ und der Tangens davon ist 1, also $f'(x) = \tan(45) = 1$.

Bemerkenswert an der Tabelle ist, dass $\sin(x)$ abgeleitet zu $\cos(x)$ wird, aber $\cos(x)$ wird nach der Ableitung nicht wieder zu $\sin(x)$ sondern zu $-\sin(x)$.

Besonders bemerkenswert ist aber die Tatsache, dass die e-Funktion beim Ableiten erhalten bleibt!

Im G8-Gymnasium kommt die Ableitung von $\tan(x)$ offenbar nicht mehr vor und wird daher auch hier nicht weiter untersucht.

Wichtig ist, dass Sie diese Ableitungstabelle auswendig lernen. Das ist sozusagen Ihr Handwerkszeug. Sie verlieren im Abitur sehr viel Zeit, wenn Sie jedes Mal nachschlagen müssen!
Kommen wir noch einmal darauf zurück, dass sich aus der ersten Ableitung der Steigungswinkel der Tangente in einem beliebigen Punkt x_0 einer Funktion $f(x)$ berechnen lässt. Zwei Rechenbeispiele sollen den Vorgang verdeutlichen.

Rechenbeispiel 1:

Es sei $f(x) = x^2$. Gesucht ist der Steigungswinkel der Tangente im Punkt $P(1|1)$.

Lösung:

Bilde mit der Potenzregel zunächst f' und erhalte $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$. Nun setzt man einfach die x-Koordinate von P, nämlich $x_0 = 1$ ein und erhält $f'(1) = 2$. Dies ist der Tangens des gesuchten Steigungswinkels. Folglich gilt $\tan(\alpha) = 2$ woraus sich der Steigungswinkel selbst mit $\alpha = 63{,}43°$ ergibt. Mit dem GTR geben Sie hierzu {2ND TAN 2} ein. Vergessen Sie nicht, den GTR über {MODE} in den Modus {DEGREE} einzustellen, damit der Winkel im Gradmaß berechnet wird.

Rechenbeispiel 2:

Es sei $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$. Gesucht ist der Steigungswinkel der Tangente im Punkt $P(0|1)$.

Lösung:

Mit $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$ folgt $f'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$. $x_0 = 0$ eingesetzt ergibt $f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$, also folgt $\tan(\alpha) = 1$ und damit $\alpha = 45°$.

1.1.3 Rechenregeln

Bisher können wir nur elementare Funktionen ableiten, aber Funktionen sind in der Regel nicht elementar. Sie können auf vielfältige Weise zusammengesetzt oder verknüpft sein, z.B. mit + oder ·. Hier einige Beispiele:

1. $f(x) = x^2 + x$. Hier ist f(x) die Summe der Funktionen $u(x) = x^2$ und $v(x) = x$. f hat also die Form $f(x) = u(x) + v(x)$

2. $f(x) = x^2 \sin(x)$. Hier ist $f(x)$ das Produkt der Funktionen $u(x) = x^2$ und $v(x) = \sin(x)$. Somit hat f die Form $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

3. $f(x) = \sin(2x)$. Das ist eine besondere Form. Hier steckt sozusagen eine Funktion in einer anderen drin. Im Beispiel steckt die Funktion $v(x) = 2x$ in der Funktion $u(x) = \sin(x)$. Man sagt, dass die Funktionen ineinander verschachtelt sind. f hat die Form $f(x) = u\big(v(x)\big)$, wobei $v(x)$ die innere und $u(x)$ die äußere Funktion ist.

4. $f(x) = e^{x/2}$. Auch hier steckt wieder eine Funktion in einer anderen. Im Beispiel sind die Funktionen $v(x) = x/2$ und $u(x) = e^x$ ineinander verschachtelt. f hat wieder die Form $f(x) = u\big(v(x)\big)$, mit $v(x) = x/2$ als innerer und $u(x) = e^x$ als äußerer Funktion.

Um auch zusammengesetzte Funktionen ableiten zu können, entwickelt man in der Schule eine Reihe von Rechenregeln. Die wichtigsten fassen wir wieder in einer Tabelle zusammen.

Rechenregel	f(x)	f‘(x)
Konstanter Faktor:	$c \cdot u(x)$	$c \cdot u'(x)$
Summenregel:	$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
Produktregel:	$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Kettenregel:	$u\big(v(x)\big)$	$u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$

Die Quotientenregel kommt im G8-Abitur nicht mehr vor!

Die erste Regel in dieser Tabelle besagt, dass ein konstanter Faktor $c \in \mathbb{R}$ beim Ableiten erhalten bleibt. Dies ist nicht zu verwechseln mit der Aussage aus der vorangehenden Tabelle. Steht die Konstante allein, so wird sie beim Ableiten zu 0, d.h. für $f(x) = c$ gilt $f'(x) = 0$.

Hier einige Rechenbeispiele zur Verdeutlichung.

Rechenbeispiel 1 (Potenz- und Summenregel):

Es sei $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x + 1$. Gesucht ist $f'(x)$.

Lösung:

Beim Ableiten werden alle Exponenten als Faktor nach vorne gezogen, die neuen Exponenten sind um eins erniedrigt und die Konstante +1 am Ende fällt weg.

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2}x^3 + 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 + 2 \cdot 2x - 1 = 2x^3 + x^2 + 4x - 1$$

Rechenbeispiel 2 (Produktregel):

Es sei $f(x) = x^2 \cdot e^x$. Gesucht ist $f'(x)$.

Lösung:

f hat die Form $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = e^x$. Zum Ableiten wird demnach die Produktregel verwendet. Es gilt $u'(x) = 2x$ und $v'(x) = e^x$ und damit $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2\mathrm{x}\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + x^2 e^x = (x^2 + 2x)e^x$.

Die Kettenregel gilt von allen als die schwierigste, denn bei einer zusammengesetzten Funktion der Form $f(x) = u\big(v(x)\big)$ müssen Sie erkennen lernen, welches die „äußere" und welches die „innere" Funktion ist.

Beispiele zu „äußere/innere" Funktion:

1) $f(x) = \ln(x^2)$

äußere Funktion

$u(x) = \ln(x)$

innere Funktion

$v(x) = x^2$

2) $f(x) = \sin^2(x)$

äußere Funktion

$u(x) = \mathrm{x}^2$

innere Funktion

$v(x) = \sin(x)$

3) $f(x) = e^{2\mathrm{x}}$

äußere Funktion

$u(x) = e^{\mathrm{x}}$

innere Funktion

$v(x) = 2\mathrm{x}$

In Beispiel 1) ist klar zu erkennen, was innen und was außen ist. In Beispiel 2) gibt es eigentlich eher ein „oben" und „unten". Wenn Sie in einem solchen Fall nicht sehen, was innen und außen ist, können Sie dies leicht durch ineinander Einsetzen herausfinden. In Beispiel 2) setzen Sie also $v(x)$ in $u(x)$ ein und prüfen, ob Sie $f(x)$ erhalten. In unserem Fall gilt $u\big(v(x)\big) = u\big(\sin(x)\big) = \sin^2(x)$ und dies ist offensichtlich $f(x)$. Hätten Sie stattdessen $u(x)$ in $\mathrm{v}(x)$ eingesetzt, so hätten Sie $v\big(u(x)\big) = v(\mathrm{x}^2) = \sin(x^2)$ erhalten, also nicht $f(x)$. Folglich muss, wie im Beispiel angegeben $u(x) = x^2$ die äußere und $v(x) = \sin(x)$ die innere Funktion sein. Überprüfen Sie dies zur Übung noch einmal an Beispiel 3).

Die Kettenregel besagt nun, dass man die äußere Funktion ableitet (die innere bleibt dabei unverändert) und mit der Ableitung der inneren Funktion malnimmt. Somit ergeben sich für die drei obigen Beispiele die folgenden Ableitungen:

1) $f(x) = \ln(x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2\mathrm{x} = \frac{2}{x}$

2) $f(x) = \sin^2(x) \Rightarrow f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

3) $f(x) = e^{2\mathrm{x}} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}$

Es folgen nun weitere Rechenbeispiele zur Kettenregel.

Rechenbeispiel 3 (Kettenregel):

Es sei $f(x) = e^{x/2}$. Gesucht ist $f'(x)$.

Lösung:

f hat die Form $f(x) = u\big(v(x)\big)$ mit $u(x) = e^x$ als äußerer und $v(x) = x/2$ als innerer Funktion. Wir leiten mit der Kettenregel ab und bilden $u'\big(v(x)\big)$. Es wird also zunächst nur die äußere Funktion abgeleitet und deren Argument $v(x)$ bleibt erhalten. Mit $u'(x) = e^x$ folgt $u'\big(v(x)\big) = e^{x/2}$. Jetzt wird die innere Funktion $v(x)$ abgeleitet: $v'(x) = 1/2$. Nach der Kettenregel müssen wir nun das Produkt bilden und erhalten $f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x) = \frac{1}{2} e^{x/2}$.

Rechenbeispiel 4 (Kettenregel):

Bestimme die erste Ableitung von $f(x) = \sin\big(\ln(x)\big)$.

Lösung:

f hat wieder die Form $f(x) = u\big(v(x)\big)$ mit $u(x) = \sin(x)$ als äußerer und $v(x) = \ln(x)$ als innerer Funktion. Wir leiten mit der Kettenregel ab und bilden zunächst $u'(x) = \cos(x)$, folglich ist $u'\big(v(x)\big) = \cos\big(\ln(x)\big)$. Die Ableitung der inneren Funktion ist $v'(x) = 1/x$. Nach der Kettenregel folgt dann $f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x) = \frac{1}{x} \cos\big(\ln(x)\big)$.

In der Praxis werden Sie die Regeln u.U. kombiniert anwenden müssen!

Neben der ersten Ableitung gibt es auch höhere Ableitungen einer Funktion. Um beispielsweise die zweite Ableitung zu kennzeichnen schreibt man einfach $f''(x)$, für die dritte Ableitung $f'''(x)$. Bei noch höheren Ableitungen wird diese Schreibweise unpraktisch. Statt der Striche schreibt man dann die Nummer der Ableitung, eingefasst in runden Klammern, nämlich so: $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$ usw. Im Abitur werden bei der Kurvendiskussion normalerweise höchstens dritte Ableitungen benötigt.

Beispiele für höhere Ableitungen:

1. $f(x) = x^5$, $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$, $f'''(x) = 60x^2$, $f^{(4)}(x) = 120x$, $f^{(5)}(x) = 120$, $f^{(6)}(x) = 0$
2. $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x)$

Sie sehen, dass es auch beim Bilden höherer Ableitungen noch Gesetzmäßigkeiten zu entdecken gibt. Im Fall von Beispiel 1 sogar zwei Gesetzmäßigkeiten! Im Falle von Potenzen der Form x^n landen alle höheren Ableitungen irgendwann einmal bei 0, nämlich genau ab der (n+1)-ten Ableitung. Wenn man beim Ableiten die Faktoren nicht gleich ausrechnet, sondern einfach nur hinschreibt, sieht man, wie sich Stück für Stück eine Faktorenreihe aufbaut: $f(x) = x^5$, $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 5 \cdot 4 \cdot x^3$, $f'''(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot x^2$, $f^{(4)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x$, $f^{(5)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ und zuletzt wieder $f^{(6)}(x) = 0$.

Im zweiten Beispiel sehen Sie, dass Ableitungen auch zyklisch sein können. Wir beginnen mit $\sin(x)$ und kehren nach dem vierten Ableiten wieder zurück zu $\sin(x)$.

Mit den höheren Ableitungen werden wir uns später, beim Thema Kurvendiskussion noch einmal genauer beschäftigen.

1.1.4 Tangentengleichung, Normalengleichung

In den Abi-Aufgaben kommt es immer wieder vor, dass man nicht nur die Steigung der Tangente in einem bestimmten Punkt berechnen soll, sondern die gesamte Tangentengleichung. Gegeben ist also die Funktion $f(x)$ und ein Punkt $P(x_0|y_0)$ der auf dem Graphen von f liegt. Gesucht ist die Geradengleichung der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt P. Ebenso kann es vorkommen, dass die Gleichung der zugehörigen Normalen gesucht ist. Zur Erinnerung: Die Normale ist diejenige Gerade, die im Punkt P senkrecht zur Tangente steht. In der Schule haben Sue hierfür entsprechende Formeln hergeleitet.

Tangentengleichung	***Normalengleichung***
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	$y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$

Rechenbeispiel 1:

Es sei $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Gesucht ist die Gleichung der Tangente im Punkt $P(1|2)$ an den Graphen von f.

Lösung:

Berechne zuerst f' mit $f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(1) = 4$. Mit $f(1) = 2$ folgt durch Einsetzen $y = 4(x-1) + 2 = 4x - 2$. Dies ist die gesuchte Tangentengleichung.

Fragen zur Tangenten- oder Normalengleichung kommen immer mal wieder im Pflichtteil vor. Hier ein Ausschnitt aus dem Pflichtteil 2007 als Beispiel.

Aufgabe 4 (Pflichtteil 2007):

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

b) Das Schaubild von f hat im Punkt $\mathrm{P}\left(1\middle|\frac{1}{2}\right)$ die Normale n. Ermitteln sie eine Gleichung von n.

Lösung:

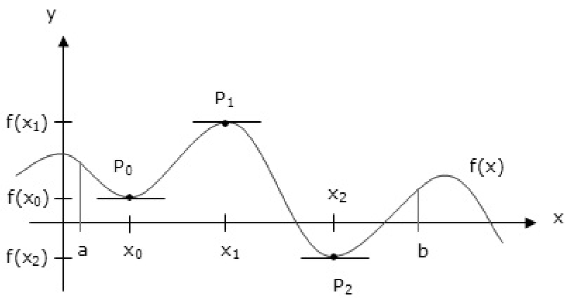
Zunächst benötigen wir f' (im Jahr 2007 war die Quotientenregel noch prüfungs-relevant). Es gilt $f'(x) = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ und damit $f'(1) = \frac{3}{4}$. Mit $f(1) = \frac{1}{2}$ folgt nun nach Einsetzen in die Normalengleichung $y = \frac{-1}{3/4}(x-1) + \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$ also $y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{6}$. Dies ist die gesuchte Normalengleichung.

1.2 Kurvendiskussion

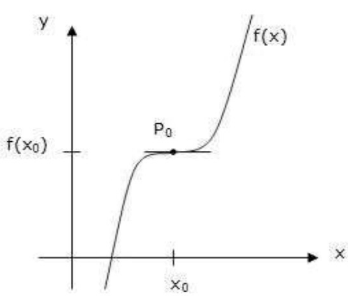
Eine Kurvendiskussion hat zum Ziel zu einer gegebenen Funktion f gewisse Kenngrößen zu ermitteln. Man versucht dabei, charakteristische Merkmale der Funktion zu beschreiben. Hat die Funktion Hoch- oder Tiefpunkte? Gibt es Wende-punkte? Hat sie Nullstellen, und wenn ja, wo? Gibt es Polstellen, Asymptoten, Symmetrien? Für welche x-Werte ist die Funktion definiert und welche Werte kann sie annehmen? Dies sind die Fragen, die man bei der Diskussion einer Kurve im Allgemeinen beantworten will.

1.2.1 Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten

Mit den bisherigen Rechenregeln haben wir bereits das gesamte Handwerkszeug, das wir brauchen, um die Extrempunkte einer Funktion zu bestimmen, falls es solche überhaupt gibt. Schauen Sie sich einmal die folgende Abbildung an.

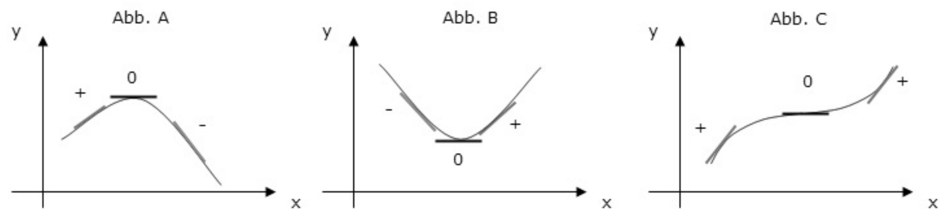


Wir haben an jedem Hoch- und Tiefpunkt die Tangente eingezeichnet. Was fällt Ihnen auf? Genau! Die Tangenten verlaufen waagrecht! Die Steigung der Tangente in einem Hoch- bzw. Tiefpunkt ist also gleich 0. Im letzten Kapitel haben wir erfahren, dass die Steigung der Tangente etwas mit der ersten Ableitung der Funktion in dem betreffenden Punkt zu tun hat. Die erste Ableitung ist nämlich nichts anderes als die Steigung der Tangente (genauer gesagt: der Tangens des Steigungswinkels). Bei einer waagrechten Tangente ist der Steigungswinkel 0, folglich ist auch der Tangens des Steigungswinkels also die erste Ableitung gleich 0. Damit haben wir eine erste wichtige Entdeckung gemacht: Damit wir überhaupt Extrempunkte finden können, muss zumindest einmal $f'(x) = 0$ gelten. Wir müssen also diejenigen x-Werte finden, für die $f'(x) = 0$ wird. Diese x-Werte sind unsere Kandidaten für Hoch- und Tiefpunkte. Warum nur Kandidaten? Weil es sein kann, dass in einem gewissen Punkt x_0 zwar $f'(x_0) = 0$ ist aber dennoch weder ein Hoch- noch ein Tiefpunkt vorliegt. Schauen Sie sich dazu folgende Abbildung an:



Sie sehen, dass die gezeigte Kurve mit zunehmenden x-Werten immer mehr abflacht, bis die Tangente in x_0 waagrecht verläuft, dann aber wieder zunehmend steigt. Hier haben wir den Fall einer waagrecht verlaufenden Tangente und dennoch ist P_0 weder ein Hochpunkt noch ein Tiefpunkt. Das bedeutet, dass die Bedingung $f'(x) = 0$ notwendig ist, um überhaupt Extrempunkte zu finden, aber nicht ausreichend! Man sagt, die Bedingung sei notwendig, aber nicht hinreichend.

Wir brauchen ein weiteres Kriterium, um die Nicht-Extrempunkte sozusagen herauszufiltern. Dazu betrachten wir die nächste Abbildung.



In Abbildung A haben wir einen Hochpunkt vorliegen. Links vom Hochpunkt haben die Tangenten eine positive Steigung, zum Hochpunkt hin werden sie immer flacher, im Hochpunkt selbst ist die Steigung Null, und nach dem Hochpunkt sind die Tangentensteigungen negativ.

In Abbildung B haben wir einen Tiefpunkt. Hier sind die Verhältnisse genau umgekehrt. Links vom Tiefpunkt haben die Tangenten negative Steigung, zum Tiefpunkt hin werden sie immer steiler und nach dem Tiefpunkt sind die Tangentensteigungen positiv.

In Abbildung C haben wir ebenfalls einen Punkt mit $f'(x_0) = 0$. Links von x_0 sind die Steigungen positiv und werden zu x_0 hin immer flacher, bis die Steigung in x_0 genau 0 ist. Im Gegensatz zu Abbildung A nimmt die Steigung nach x_0 jedoch wieder zu. Einen solchen Punkt nennt man einen Sattelpunkt. Sattelpunkte sind eine spezielle Form von Wendepunkten, die Sie später noch kennenlernen werden.

Damit haben wir das entscheidende Merkmal entdeckt, um Hoch- und Tiefpunkte zu finden bzw. diese von Sattelpunkten zu unterscheiden. Bei Hoch- und Tiefpunkten findet ein Vorzeichenwechsel in der Tangentensteigung statt. Bei einem Sattelpunkt ist dies nicht der Fall.

Im Falle eines Hochpunkts müssen wir also testen ob die Tangentensteigung von + nach − wechselt. Man setzt dazu einfach zwei x-Werte nahe genug(!) links und rechts vom vermeintlichen Hochpunkt in f' ein und testet das Vorzeichen. Umgekehrt muss man für einen Tiefpunkt lediglich testen, ob das Vorzeichen der Tangentensteigung von − nach + wechselt. Technisch gesehen ist ein Vorzeichenwechsel der Tangentensteigung von + nach − gleichbedeutend mit der Bedingung $f''(x) < 0$ (Hochpunkt!) bzw. von − nach + mit der Bedingung $f''(x) > 0$ (Tiefpunkt!). Ob Sie nun auf Vorzeichenwechsel testen, oder den Weg über die zweite Ableitung gehen, bleibt Ihnen überlassen. Nehmen Sie den Weg des geringsten Wiederstands! Da die

Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten zumeist in den Wahlteilen vorkommt, haben Sie dort auch den GTR zur Verfügung, so dass Sie sich die Kurve zeichnen lassen und mit {2ND CALC minimum} bzw. {2ND CALC maximum} bequem das Minimum bzw. Maximum bestimmen können.

Wir halten fest:

Notwendige Bedingung für Hoch- und Tiefpunkte: $\boldsymbol{f'(x) = 0}$
Finde alle x-Werte in denen $f'(x) = 0$ wird. Dies sind die Kandidaten für Hoch- und Tiefpunkte.

Hinreichende Bedingung für Hoch- und Tiefpunkte: $\boldsymbol{f''(x) \neq 0}$
Setze der Reihe nach alle aus $f'(x) = 0$ erhaltenen x-Werte in $f''(x)$ ein.

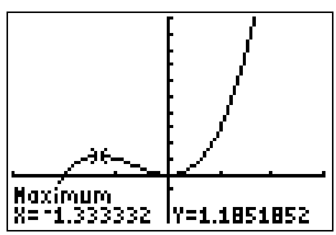
Ist $f''(x) > 0$, so liegt ein Tiefpunkt vor, für $f''(x) < 0$ ein Hochpunkt.

Um die konkreten Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte zu bestimmen, müssen Sie die x-Werte natürlich noch in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen und die Funktionswerte bestimmen, damit Sie die noch fehlenden y-Koordinaten bekommen. Nur für den Fall, dass Ihnen der Begriff im Abitur begegnet: x-Werte nennt man auch Abszissen. Die Abszisse ist die x-Achse im Koordinatensystem, die Ordinate ist die y-Achse.

Rechenbeispiel 1:

$f(x) = x^3 + 2x^2$. Bestimmen Sie alle Extrempunkte des Schaubilds von f.

Lösung:



Mit $f'(x) = 3x^2 + 4x = 0$ folgt $x(3x+4) = 0$, also $x_1 = 0$ oder $x_2 = -\frac{4}{3}$. Dies sind die Kandidaten für Hoch- und Tiefpunkte. Wir überprüfen dies durch Einsetzen in die zweite Ableitung. Mit $f''(x) = 6x + 4$ folgt $f''(0) = 4 > 0$, d.h. dass an der Stelle $x_1 = 0$ ein Tiefpunkt vorliegt. Weiterhin gilt $f''\left(-\frac{4}{3}\right) = -4 < 0$, also liegt an der Stelle $x_2 = -\frac{4}{3}$ ein Hochpunkt vor. Wir bestimmen noch die y-Koordinaten durch Einsetzen in $f(x)$ und erhalten $f(0) = 0$ und $f\left(-\frac{4}{3}\right) \approx 1{,}185$ und schließlich $H\left(-\frac{4}{3}\middle|1{,}185\right)$ und $T(0|0)$.

Falls Sie die Aufgabe lieber mit dem GTR lösen wollen, geben Sie den Funktionsterm einfach bei Y_1 ein, lassen sich den Graphen mit {GRAPH} anzeigen und bestimmen anschließend mit {2ND CALC minimum} bzw. {2ND CALC maximum} die jeweiligen Extremstellen, siehe Abbildung oben.

Im zweiten Rechenbeispiel zeigen wir, dass die herkömmlichen Methoden zur Berechnung von Hoch- und Tiefpunkten auch einmal versagen können, nämlich dann, wenn die Ableitungen kompliziert werden, so dass man nicht mehr problemlos die Nullstellen bestimmen kann oder die Aufgabenstellung den Einsatz des GTR verbietet. Im Wahlteil Analysis I 2 der Abiturprüfung Mathematik 2007 haben wir einen solchen Fall. Dargestellt wird nur ein kleiner Ausschnitt der Aufgabe a) und der Wortlaut wird sinngemäß wiedergegeben.

Rechenbeispiel 2:

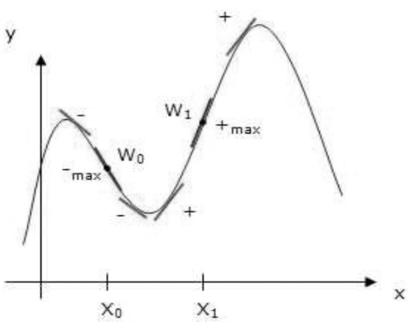
Geben Sie alle Tiefpunkte der Funktion $f(x) = \frac{4}{2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ an.

Lösung:

Wenn Sie hier auf dem üblichen Weg mit Ableitungen arbeiten, werden Sie schnell merken, wie aufwändig und schwierig das wird. Versuchen Sie es! Man könnte vielleicht mit dem GTR einen Tiefpunkt bestimmen, aber es wird ja nach allen(!) Tiefpunkten gefragt. Wir kommen also nicht um „echte“ Überlegungen herum! Wir werden gleich sehen, dass es möglich ist, diese Aufgabe komplett ohne GTR und ohne Ableitungen zu lösen! Überlegen wir uns dazu was passiert, wenn in einem Bruch der Zähler fest bleibt und der Nenner immer größer wird. Wir können uns dies bequem an einem Beispiel verdeutlichen: $\frac{1}{1} = 1; \frac{1}{10} = 0{,}1; \frac{1}{100} = 0{,}01$. Offensichtlich wird der Bruch am kleinsten, wenn der Nenner den größten Wert annimmt! Dasselbe gilt für unsere Aufgabe. Hier ist der Nenner $2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Da cos nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen kann, wird der Nenner am größten, wenn cos den Wert 1 annimmt. Dies ist z.B. bei $x = 0$ der Fall. Somit hat der Bruch bei $x = 0$ den minimalen Wert $\frac{4}{2+1} = \frac{4}{3}$. Damit haben wir bereits einen Tiefpunkt bei $T\left(0\middle|\frac{4}{3}\right)$ gefunden. Mit der bekannten Formel $p = \frac{2\pi}{a}$ können wir die Periode von Ausdrücken wie $\cos(ax)$ oder $\sin(ax)$

bestimmen. In unserem Fall gilt $p = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$. Somit wiederholt sich unser Tiefpunkt alle 4 Längeneinheiten und mit $T_k\left(4k \middle| \frac{4}{3}\right)$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$ haben wir nun alle Tiefpunkte. Gehen Sie nun die Argumentation noch einmal Schritt für Schritt durch, indem Sie alle Hochpunkte der Funktion bestimmen. (Lösung: $H_k(4k+2|2)$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$).

1.2.2 Bestimmung von Wendepunkten



Bei der Untersuchung auf Hoch- und Tiefpunkte im vorigen Abschnitt ist uns bereits ein spezieller Vertreter der Wendepunkte begegnet. Es stellt sich die Frage was Wendepunkte nun eigentlich sind. Betrachten Sie dazu den Verlauf der Steigungen in der nebenstehenden Abbildung. Links von W_0, nach dem Hochpunkt, haben wir negative Tangentensteigungen. Die Steigungen selbst nehmen zu W_0 hin immer mehr ab, bis sie in W_0 ihren Tiefstwert erreicht haben. Von da an nehmen sie wieder zu, bleiben aber bis zum lokalen Tiefpunkt immer noch negativ. Links von W_1 , nach dem Tiefpunkt, haben wir positive Tangentensteigungen. Die Steigungen nehmen zu W_1 hin immer mehr zu, bis sie in W_1 ihren Maximalwert erreicht haben. Von da an nehmen die Steigungen wieder ab, bleiben aber bis zum nächsten lokalen Hochpunkt immer noch positiv. Sie sehen also, dass in den Punkten W_0 und W_1 die Tangentensteigungen (betragsmäßig) maximal sind und es findet kein Vorzeichenwechsel statt. Punkte für die diese beiden Bedingungen gelten, nennt man Wendepunkte. Wenn wir solche Wendepunkte finden wollen, müssen wir uns folglich fragen, an welchen Stellen die Tangentensteigungen maximal bzw. minimal werden. Anders ausgedrückt: Wir müssen die Hoch- und Tiefpunkte der Tangentensteigungen finden. Die Tangentensteigungen werden wiedergegeben durch $f'(x)$. Die Hoch- und Tiefpunkte einer Funktion finden wir, indem wir deren Ableitung Null setzen. Also suchen wir alle x-Werte für die $f''(x) = 0$ wird. Auch dies ist wieder nur eine notwendige Bedingung für Wendepunkte. Die hinreichende Bedingung ist, dass für die gefundenen x-Werte $f'''(x) \neq 0$ sein muss. Andernfalls liegt kein Wendepunkt vor.

Wir fassen zusammen:

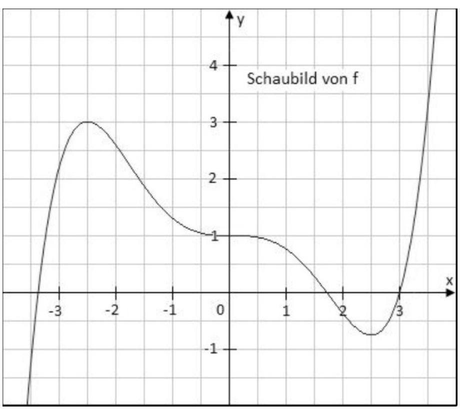
Notwendiges Kriterium für Wendepunkte: $f''(x) = 0$
Finde alle x-Werte für die $f''(x) = 0$ wird. Dies sind die Kandidaten für Wendepunkte.

Hinreichendes Kriterium für Wendepunkte: $f'''(x) \neq 0$
Setze der Reihe nach alle aus $f''(x) = 0$ erhaltenen x-Werte in $f'''(x)$ ein.

Ist $f'''(x) \neq 0$, so liegt ein Wendepunkt vor, andernfalls nicht.

1.2.3 Untersuchung auf Monotonie

Mit der ersten Ableitung $f'(x)$ lässt sich auch feststellen, ob eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall [a;b] (streng) monoton wächst oder (streng) monoton fällt. Grund: $f'(x)$ gibt, wie wir ja bereits wissen, die Steigung der Tangente in x an.



Wir haben folgende Zusammenhänge:

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ streng monoton wachsend
$f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ monoton wachsend
$f'(x) < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend
$f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ monoton fallend

In [-2,5;2,5] ist f monoton fallend. An der Stelle $x = 0$ gilt $f'(x) = 0$, d.h. wir haben eine waagrechte Tangente und daher ist f nicht streng monoton fallend!

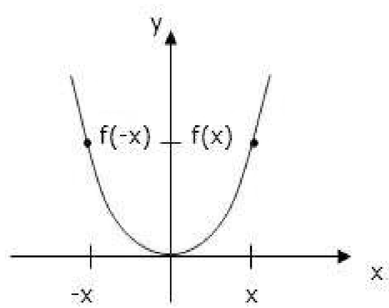
1.2.4 Symmetrien

Viele Betrachtungen werden erheblich vereinfacht, wenn man festgestellt hat, dass eine Funktion symmetrisch ist. Hat man beispielsweise auf einer Seite einer achsensymmetrischen Funktion einen Extrempunkt gefunden, so kennt man aufgrund der Symmetrie auch den Extrempunkt auf der anderen Seite. Dasselbe gilt für Polstellen, Nullstellen, Wendepunkte usw. Im Schulunterricht haben Sie zwei verschiedene Arten von Symmetrien kennengelernt, die Achsensymmetrie und die Punktsymmetrie.

Wenn wir uns gleich mit dem Nachweis von Symmetrien beschäftigen, werden wir ein mathematisches Hilfsmittel benötigen, das hier noch einmal kurz erläutert wird. Es geht um das Verschieben einer Funktion im Koordinatensystem. Wenn Sie eine Funktion parallel zur x-Achse um den Wert a nach rechts verschieben wollen, so bilden Sie $f(x-a)$ bzw. $f(x+a)$, wenn Sie nach links verschieben wollen. Achtung: Minus bedeutet in diesem Fall tatsächlich eine Verschiebung nach rechts und Plus eine Verschiebung nach links! Eine Verschiebung entlang der y-Achse erreicht man durch addieren eines Wertes b zum Funktionsterm, also durch Bildung von $f(x)+b$. Für $b>0$ ist dies eine Verschiebung nach oben bzw. für $b<0$ eine Verschiebung nach unten. Natürlich kann man beides auch kombinieren. So ist z.B. $f(x-3)+1$ gegenüber $f(x)$ um 3 Einheiten nach rechts und um eine Einheit nach oben verschoben.

1.2.4.1 Achsensymmetrie

Eine Funktion kann, wenn überhaupt, nur zur y-Achse symmetrisch sein (andernfalls handelt es sich nicht um eine Funktion). Wie kann man nun von einer gegebenen Funktion $f(x)$ feststellen, ob sie achsensymmetrisch ist? Betrachten wir dazu folgende Abbildung:



Man sieht sofort: Der Wert x und der spiegelbildliche Wert $-x$ besitzen denselben Funktionswert. Daraus ergibt sich schon das Kriterium für Symmetrie zur y-Achse:

Kriterium für Symmetrie zur y-Achse:

$$f(x)=f(-x)$$

Sie testen also lediglich, ob die Bedingung $f(x)=f(-x)$ stets (also für jedes x) erfüllt ist oder nicht.

Rechenbeispiel 1:

Untersuche $f(x)=x^4+2x^2-1$ auf Achsensymmetrie.

Lösung:

$f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 - 1 = x^4 + 2x^2 - 1 = f(x)$. Also ist $f(x)$ achsen-symmetrisch. Aus dem Beispiel sieht man sofort, dass geradzahlige Potenzen ein Vorzeichen eliminieren.

Erkenntnis:

Kommen im Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion nur gerade Potenzen vor, so ist die Funktion achsensymmetrisch.

Rechenbeispiel 2:

Untersuche $f(x) = x^3 - x^2$ auf Achsensymmetrie.

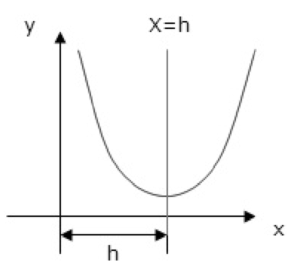
Lösung:
$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2 \neq f(x)$. Also ist $f(x)$ nicht achsen-symmetrisch. Aus diesem Beispiel sieht man, dass ganzrationale Funktionen nicht achsensymmetrisch sind, sobald im Funktionsterm ungerade Potenzen vorkommen.

Rechenbeispiel 3:

Untersuche $f(x) = x^2 \cos(x)$ auf Achsensymmetrie.

Lösung:
$f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos(x) = f(x)$. Also ist f (x) achsensymmetrisch.

Eine Funktion muss nicht unbedingt zur y-Achse symmetrisch sein. In der folgenden Abbildung sehen Sie eine Funktion, die zu einer Parallelen der y-Achse symmetrisch ist.



In der nebenstehenden Abbildung wird die Symmetrieachse durch die Gleichung $x = h$ be-schrieben, wobei h eine beliebige reelle Zahl sein kann. Durch ein Verschieben der Funktion um den Wert h (nach links), erreichen Sie, dass die Funktion nunmehr zur y-Achse symmetrisch ist. Formal bilden Sie durch das Verschieben eine neue Funktion $g(x)$ mit $g(x) = f(x + h)$, wenn Sie, wie im Beispiel, $f(x)$ nach links verschieben. Anschließend testen Sie mit dem vorherigen Kriterium, ob $g(-x) = g(x)$ gilt. Wenn ja, dann ist $f(x)$ symmetrisch zur Achse $x = h$.

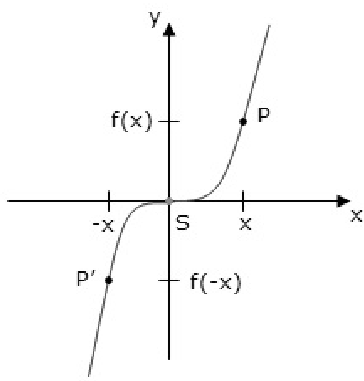
Rechenbeispiel 4:

Untersuche $f(x) = x^2 - 4x + 4$ auf Symmetrie zur Achse $x = 2$.

Lösung:

Es gilt $f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Verschiebe nun f um $h = 2$ nach links: $g(x) = f(x+2) = \left((x + 2) - 2\right)^2 = x^2$. Mit $g(x) = x^2$ ist $g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$. Also ist $f(x)$ symmetrisch zur Achse $x = 2$.

1.2.4.2 Punktsymmetrie



Eine andere Art der Symmetrie ist die Punktsymmetrie. Wenn eine Funktion punktsymmetrisch ist, dann gibt es irgendwo auf der Kurve einen Punkt S, der die Kurve in zwei Zweige aufteilt. Dreht man den einen Zweig am Punkt S um $180°$, so kommt er genau auf dem anderen Zweig zu liegen. Nach einer Drehung um $180°$ sind die beiden Zweige also deckungsgleich. Um ein Kriterium für Punktsymmetrie zu entwickeln, beginnen wir mit einer einfachen Variante. Zunächst versuchen wir festzustellen, wann eine Funktion symmetrisch zum Punkt $S(0|0)$, also zum Ursprung, ist. Wähle auf dem rechten Zweig irgendeinen Punkt $P\left(x\middle|f(x)\right)$. Punktsymmetrisch dazu ergibt sich auf dem linken Zweig der Punkt $P'\left(-x\middle|f\ (-x)\right)$. Betrachten Sie nun die Funktionswerte $f(x)$ und $f(-x)$. Sie liegen genau entgegengesetzt zueinander. Wenn die Funktion wirklich punktsymmetrisch (zum Ursprung) ist, dann muss $f(x) = -f(-x)$ gelten! Manchmal wird das auch in der Form $-f(x) = f(-x)$ notiert. Dies ist das Kriterium für Punktsymmetrie (zum Ursprung)!

Kriterium für Punktsymmetrie zum Ursprung: $-f(x) = f(-x)$

Rechenbeispiel 5:

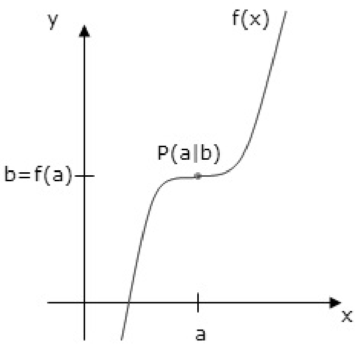
Untersuche $f(x) = x^3 - 9x$ auf Punktsymmetrie zum Ursprung.

Lösung:

Es gilt einerseits $-f(x) = -x^3 + 9x$ und andererseits $f(-x) = (-x)^3 - 9(-x) = -x^3 + 9x$. Es folgt $-f(x) = f(-x)$ und damit ist $f(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung. Sie sehen an diesem Beispiel, dass bei ungeraden Potenzen ein Vorzeichen erhalten bleibt. Wir formulieren dies als Erkenntnis.

Erkenntnis:

Kommen im Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion nur ungerade Potenzen vor, so ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.



Sehen Sie sich nun den allgemeinen Fall der Punktsymmetrie an. Die in der Abbildung gezeigte Funktion ist punktsymmetrisch zum Punkt P, der nicht der Ursprung ist. In einem solchen Fall behelfen Sie sich mit einem kleinen Trick. Verschieben Sie die Funktion einfach zurück in den Ursprung und weisen Sie mit dem eben gezeigten Kriterium die Punktsymmetrie zum Ursprung nach! Angenommen es soll Punktsymmetrie zum Punkt $P(a|b)$, wie in der Abbildung gezeigt, nachgewiesen werden, so bilden Sie zunächst $g(x) = f(x+a) - b$. Dadurch haben Sie f so verschoben, dass P nunmehr im Ursprung liegt. Jetzt testen Sie, ob $-g(x) = g(-x)$ gilt. Das war's!

Rechenbeispiel 6:

Untersuche $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 22$ auf Punktsymmetrie zum Punkt $P(3|5)$.

Lösung:

Verschiebe f so, dass P im Ursprung liegt, bilde also $g(x) = f(x+3) - 5$:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+3) - 5 = (x+3)^3 - 9(x+3)^2 + 27(x+3) - 22 - 5 \\ &= (x^3 + 9x^2 + 27x + 27) - 9(x^2 + 6x + 9) + 27x + 81 - 22 - 5 \\ &= x^3 - 9x^2 + 27x + 27 - 9x^2 - 54x - 81 + 27x + 54 = x^3 \end{aligned}$$

Damit ist $-g(x) = -x^3$ und $g(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Folglich ist $-g(x) = g(-x)$, d.h. die ursprüngliche Funktion f ist punktsymmetrisch zu $P(3|5)$.

1.2.5 Definitions- und Wertebereich

Häufig sind Funktionen nicht für alle Werte $x \in \mathbb{R}$ definiert. Will man jetzt z.B. Nullstellen oder Polstellen bestimmen, so muss hinterher geprüft werden, ob die Funktion für die gefundenen x-Werte überhaupt definiert ist. Betrachte beispielsweise die Funktion $f(x) = x \cdot ln(x)$. Die Nullstellen sieht man ja sofort, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. FALSCH! Diese Funktion hat nur eine Nullstelle, nämlich bei $x = 1$, da $ln(1) = 0$. Für den Wert $x = 0$ ist der Logarithmus und damit die ganze Funktion f nicht definiert! Gehen Sie also in Zukunft nicht zu schnell über solche vermeintlich einfachen Aufgaben hinweg. Schauen Sie genauer hin! Auch für negative Werte ist der Logarithmus nicht definiert. Der Definitionsbereich von f ist demnach $D_f = \mathbb{R}^+$. Im Gegensatz dazu kann f jeden beliebigen Wert $y \in \mathbb{R}$ annehmen, der Wertebereich ist also $W_f = \mathbb{R}$.

In einigen Abituraufgaben sind Funktionen auf bestimmte Intervalle beschränkt. Auch in solchen Fällen müssen Sie von Ihren gefundenen Hoch- und Tiefpunkten, Wendepunkten, Nullstellen, etc. diejenigen herausfischen, die im vorgegebenen Intervall liegen. Gerade periodische Funktionen wie $\sin(x)$ und $\cos(x)$ werden gern auf das Intervall einer Schwingung begrenzt, z.B. auf $[-\pi; \pi]$. Rechnen Sie hier nicht versehentlich innerhalb des Intervalls $[0; 2\pi]$!

Die Frage nach dem Definitionsbereich wird vor allem gerne bei gebrochen rationalen Funktionen gestellt. Hier müssen Sie die Nullstellen des Nenners finden und diese ausschließen. Falls mehrere Nenner vorkommen, müssen für jeden Nenner einzeln die Nullstellen gefunden und ausgeschlossen werden.

Rechenbeispiel 1:

Wie lautet der Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9}$.

Lösung:

Die Nullstellen des Nenners sind $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$, folglich ist $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-3, 3\}$.