

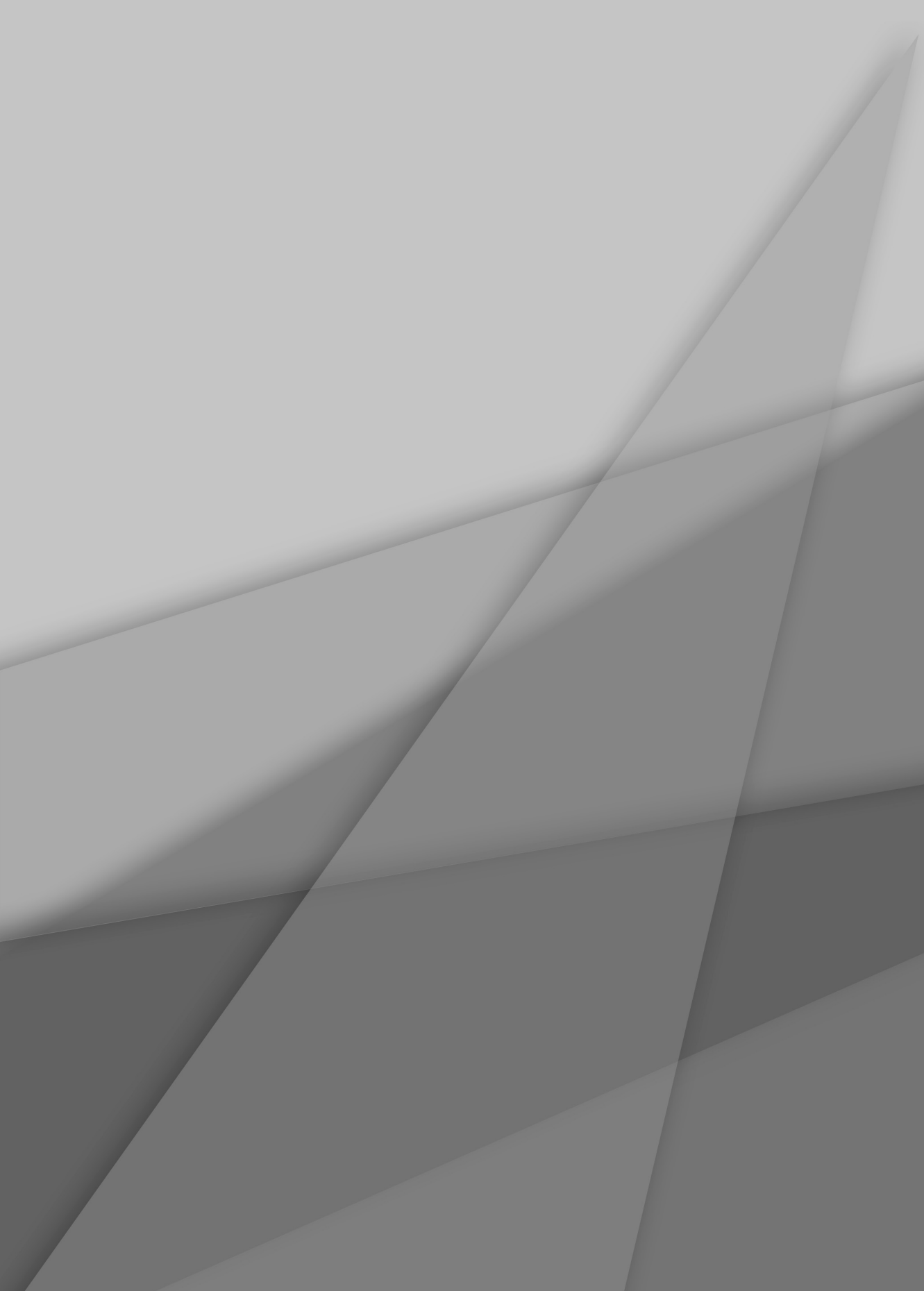
Katrin Schmallowsky

# Analysis verstehen

für Wirtschaftswissenschaftler



Katrin Schmallowsky  
Analysis verstehen



Katrin Schmallowsky

# **Analysis verstehen**

für Wirtschaftswissenschaftler

UVK Verlagsgesellschaft mbH • Konstanz  
mit UVK/Lucius • München



**Prof. Dr. Katrin Schmallowsky,**

Unternehmensberaterin für den Mittelstand, ist Professorin für Mathematik an der NBS Northern Business School in Hamburg. Sie lehrt außerdem an verschiedenen Hochschulen, darunter die Hochschule Wismar, unter anderem Wirtschaftsmathematik, Statistik, Unternehmensbewertung und Mergers and Acquisitions.

**Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-86764-804-2 (Print)

ISBN 978-3-7398-0344-9 (E-PUB)

ISBN 978-3-7398-0345-6 (E-PDF)

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© UVK Verlagsgesellschaft mbH, Konstanz und München 2017

Lektorat: Rainer Berger, München

Abbildungen: erstellt mit GeoGebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org))

Einbandgestaltung: Susanne Fuellhaas, Konstanz

Printed in Germany

UVK Verlagsgesellschaft mbH

Schützenstr. 24 · 78462 Konstanz

Tel. 07531-9053-0 · Fax 07531-9053-98

[www.uvk.de](http://www.uvk.de)

# Vorwort

Für viele Studierende der Wirtschaftswissenschaften stellt das Erlernen mathematischer Inhalte und Methoden eine große Herausforderung dar. Dem gegenüber steht die aus der technologischen Entwicklung resultierende Notwendigkeit, gerade in den Wirtschaftswissenschaften die naturwissenschaftliche Methodenkompetenz der Studierenden immer stärker zu schulen.

Das vorliegende Lehrbuch ist durch langjährige Dozententätigkeiten in der Wirtschaftsmathematik an verschiedenen Hochschulen entstanden. Es behandelt die für Wirtschaftswissenschaftler wichtigsten Themenfelder der Analysis und verzichtet weitgehend auf Herleitungen und Beweise, um den Fokus auf die wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen der Analysis zu lenken.

Die Themen umfassen zunächst eine Einführung in Folgen und Reihen, wobei besonderer Wert auf die Anwendung der Inhalte in der Finanzmathematik in Form der Rentenrechnung gelegt wurde. In den folgenden Kapiteln werden häufig vorkommende (ökonomische) Funktionen und ihre Eigenschaften betrachtet sowie die in den Wirtschaftswissenschaften häufig auftretenden Anwendungen der Differentialrechnung, auch für mehrdimensionale Funktionen, vorgestellt. Die elementare Integralrechnung ist um die Bestimmung von Konsumenten- und Produzentenrente ergänzt.

Zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben, für welche die Lösungen am Ende des Buches zusammengefasst sind, erleichtern dem Leser das Erlernen des Stoffes. Die Erstellung der Grafiken erfolgte mit der Software **GeoGebra**<sup>1</sup>. Die Erstellung eines Lehrbuches erfordert stets eine nicht unerhebliche Menge an Zeit und ich danke meinem Mann, Prof. Dr. Thomas Schmallowsky sowie meinen Söhnen Lasse und Theo für die Schaffung der entsprechenden Freiräume.

Wismar, Juni 2017

Katrin Schmallowsky

---

<sup>1</sup>© International GeoGebra Institute, 2013, <http://www.geogebra.org>



# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>9</b>
<b>1 Folgen und Reihen</b>	<b>13</b>
1.1 Folgen . . . . .	13
1.1.1 Eigenschaften von Folgen . . . . .	15
1.1.2 spezielle Folgen . . . . .	21
1.2 Reihen . . . . .	27
<b>2 Funktionen mit einer Variablen</b>	<b>41</b>
2.1 Einleitung . . . . .	41
2.1.1 Darstellung von Funktionen . . . . .	42
2.1.2 Elementare Eigenschaften von Funktionen . . . . .	44
2.1.3 Grenzwerte von Funktionen . . . . .	56
2.1.4 Stetigkeit . . . . .	59
2.2 Elementare Funktionen . . . . .	65
2.3 Ökonomische Funktionen . . . . .	75
<b>3 Differentialrechnung I</b>	<b>85</b>
3.1 Differenzierbarkeit einer Funktion . . . . .	85
3.1.1 Die erste Ableitung elementarer Funktionen . . . . .	88
3.1.2 Ableitungsregeln . . . . .	88
3.1.3 Höhere Ableitungen . . . . .	91
3.1.4 Ableitungen ökonomischer Funktionen . . . . .	91
3.2 Anwendungen der Differentialrechnung . . . . .	97
3.2.1 Das Differential . . . . .	97
3.2.2 Die Wachstumsrate . . . . .	99
3.2.3 Die Elastizität . . . . .	101
3.2.4 Die Regel von de l'Hôpital . . . . .	104



---

3.2.5	Das Taylor-Polynom . . . . .	106
3.2.6	Das Newton-Verfahren . . . . .	108
3.3	Kurvendiskussion . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>127</b>
4.1	Das unbestimmte Integral . . . . .	127
4.2	Das bestimmte Integral . . . . .	131
4.3	Anwendungen der Integralrechnung . . . . .	134
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung II</b>	<b>139</b>
5.1	Definition von Funktionen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	139
5.1.1	Ökonomische Funktionen . . . . .	142
5.1.2	Homogenität . . . . .	145
5.2	Differenzierbarkeit . . . . .	149
5.2.1	Partielle Ableitungen erster Ordnung . . . . .	149
5.2.2	Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	152
5.3	Anwendungen der Differentialrechnung II . . . . .	156
5.3.1	Das Differential . . . . .	156
5.3.2	Die partielle Elastizität . . . . .	160
5.3.3	Extremwerte ohne Nebenbedingung . . . . .	164
5.3.4	Extremwerte mit Nebenbedingungen . . . . .	172
<b>6</b>	<b>Lösungen</b>	<b>189</b>
6.1	Lösungen Kapitel 1 . . . . .	189
6.2	Lösungen Kapitel 2 . . . . .	191
6.3	Lösungen Kapitel 3 . . . . .	193
6.4	Lösungen Kapitel 4 . . . . .	196
6.5	Lösungen Kapitel 5 . . . . .	197
	<b>Literaturhinweise</b>	<b>203</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>205</b>

# Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$ .....	Natürliche Zahlen
$\mathbb{R}$ .....	Reelle Zahlen
$\mathbb{R}^n$ .....	$n$ -dimensionaler Raum der reellen Zahlen
$\mathbb{Z}$ .....	ganze Zahlen
$n \in \mathbb{N}$ .....	$n$ ist Element der natürlichen Zahlen
$a_n$ .....	$n$ -tes Folgeglied bzw. Folgenreihe
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .....	Grenzwert der Folge $a_n$
$\sum_{k=1}^n a_k$ .....	Partialsumme $s_n$
$K_0$ .....	Kapital zum Zeitpunkt Null, auch Rentenbarwert
$K_n$ .....	Kapital nach $n$ Jahren, auch Rentenendwert
$R$ .....	gleichbleibende Ratenzahlung
$p$ .....	Zinsfuß
$q$ .....	Aufzinsungsfaktor, $q = 1 + \frac{p}{100}$
$D_f$ .....	Definitionsbereich der Funktion $f(x)$
$W_f$ .....	Wertebereich der Funktion $f(x)$
$U_\varepsilon(x)$ .....	$\varepsilon$ -Umgebung von $x$

---

$A \subseteq B$ .....	Die Menge $A$ ist Teilmenge der Menge $B$ .
$f \circ g$ .....	Komposition der Funktionen $f$ und $g$
$f^{-1}(y)$ .....	Umkehrfunktion
$\lim_{x \rightarrow x^{*-}} f(x)$ ...	linksseitiger Grenzwert von $f$ an der Stelle $x^*$
$\lim_{x \rightarrow x^{*+}} f(x)$ ...	rechtsseitiger Grenzwert von $f$ an der Stelle $x^*$
$f'(x)$ .....	erste Ableitung von $f(x)$ , auch Differentialquotient
$\frac{dy}{dx}$ .....	Differentialquotient, auch erste Ableitung von $f(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$ .....	Differentialquotient, auch erste Ableitung von $f(x)$
$f''(x)$ .....	zweite Ableitung von $f(x)$
$\frac{d^2 y}{d^2 x}$ .....	zweite Ableitung von $f(x)$
$\Delta x$ .....	Änderung von $x$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .....	Differenzenquotient
$df(x)$ .....	Differential, auch $dy$
$w_f(x)$ .....	Wachstumsrate
$\varepsilon_{yx}(x)$ .....	Elastizität von $y$ in Bezug auf $x$
$F(x)$ .....	Stammfunktion von $f(x)$ , auch unbestimmtes Integral
$\int f(x)dx$ .....	unbestimmtes Integral, auch Stammfunktion von $f(x)$
$\int_a^b f(x)dx$ .....	bestimmtes Integral
$f_{x_i}$ .....	partielle Ableitung erster Ordnung
$\nabla f$ .....	Gradient
$f_{x_i x_j}$ .....	partielle Ableitung zweiter Ordnung
$H_f$ .....	Hessematrix
$\varepsilon_{x_i p_j}$ .....	Kreuzpreiselastizität
$ A_i $ .....	Hauptunterdeterminante $i$ -ter Ordnung

## Verwendete Griechische Buchstaben

$\alpha, A$  ..... Alpha

$\beta, B$  ..... Beta

$\delta, \Delta$  ..... Delta

$\epsilon, \varepsilon$  ..... Epsilon

$\lambda, \Lambda$  ..... Lambda

$\pi, \Pi$  ..... Pi

## Verwendete Symbole



..... Aufgabe



..... Beispiel



..... Definition



..... Satz



# 1 Folgen und Reihen

Folgen und Reihen spielen in vielen ökonomischen Fragestellungen eine wichtige Rolle. So lassen sich beispielsweise die Zinsrechnung, die Rentenrechnung und auch die Unternehmensbewertung auf Folgen und Reihen zurückführen. In diesem Kapitel sollen zunächst Folgen sowie deren wesentliche Eigenschaften vorgestellt werden. Im zweiten Teil des Kapitels erfolgt die Erweiterung auf Reihen; dabei wird insbesondere auf die genannten Anwendungen eingegangen.

## 1.1 Folgen

Betrachtet man für eine beliebige Abbildung nur jene Werte, die sich durch Einsetzen von Argumenten  $n$  aus den natürlichen Zahlen ergeben, so erhält man eine Punktmenge, die sogenannte **Folge**. Durch die Wahl der Argumente  $n$  aus den natürlichen Zahlen ist in der Folge gleichzeitig eine Reihenfolge festgelegt. Ist die **Indexmenge**  $\mathbb{N}$  unbegrenzt, so spricht man von einer **unendlichen Folge**, ansonsten von einer **endlichen Folge**.

### Definition 1.1.1

Eine **Folge** ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n). \end{aligned}$$

Der Wert  $a_n := f(n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  heißt  **$n$ -tes Folgeglied**,  $a_1$  ist der **Startwert**; übliche Schreibweisen für Folgen sind  $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(a_n)$ .



**Bemerkung 1.1.1**

Für Folgen sind verschiedene Darstellungsformen definiert:

- explizite Darstellung  $(a_n)$  mit der **Folgenrechtschrift**  $a_n = f(n)$
- Aufzählung:  $(a_n) = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$
- rekursive Darstellung  $(a_n)$  mit  $a_n = f(a_{n-1}), a_1$  gegeben

Die Aufzählung wird üblicherweise bei endlichen Folgen verwendet oder in Fällen, in welchen zum Beispiel durch Messungen nur einzelne Werte bekannt sind. Aus diesen Messwerten soll dann die rekursive oder die explizite Darstellung abgeleitet werden.

Die rekursive Darstellung birgt den Nachteil, dass für hohe Indizes zunächst alle vorherigen Folgeglieder bestimmt werden müssen. Die häufigste Verwendung findet daher die explizite Darstellung, da bei dieser die Berechnung eines Folgegliedes unabhängig von allen vorherigen Folgegliedern ist. Im folgenden Beispiel sind für vier Folgen die verschiedenen Darstellungsformen angegeben.

**Beispiel 1.1.1**

1. Die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = n$  kann wie folgt dargestellt werden:
  - explizite Darstellung:  $a_n = n$
  - Aufzählung:  $(a_n) = \{1, 2, 3, \dots\}$
  - rekursive Darstellung:  $a_n = a_{n-1} + 1, a_1 = 1$ .
2. Die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$  kann wie folgt dargestellt werden:
  - explizite Darstellung:  $a_n = (-1)^n$
  - Aufzählung:  $(a_n) = \{-1, 1, -1, \dots\}$
  - rekursive Darstellung:  $a_n = a_{n-1} \cdot (-1), a_1 = -1$ .
3. Die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = n^2$  kann wie folgt dargestellt werden:
  - explizite Darstellung:  $a_n = n^2$
  - Aufzählung:  $(a_n) = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$
  - rekursive Darstellung:  $a_n = (\sqrt{a_{n-1}} + 1)^2, a_1 = 1$ .

### 1.1.1 Eigenschaften von Folgen

Im Folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften von Folgen vorgestellt.

#### Monotonie und Beschränktheit

Eine wichtige Rolle bei der Auswertung von Folgen spielt die Frage, ob die Folge eine gleichmäßige Entwicklung beschreibt und ob der Entwicklung einer Folge Grenzen gesetzt sind.

##### Definition 1.1.2

Eine Folge  $(a_n)$  heißt

- **monoton wachsend**, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt :

$$a_{n-1} \leq a_n;$$

- **monoton fallend**, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt :

$$a_{n-1} \geq a_n;$$

- **streng monoton wachsend**, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt :

$$a_{n-1} < a_n;$$

- **streng monoton fallend**, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt :

$$a_{n-1} > a_n;$$

- Eine Folge heißt **nach unten bzw. nach oben beschränkt**, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$a_n \geq u \in \mathbb{R} \text{ bzw. } a_n \leq o \in \mathbb{R},$$

Der Wert  $u$  wird als **untere Schranke**,  $o$  als **obere Schranke** bezeichnet.

- Eine Folge heißt **beschränkt** falls sie nach unten und oben beschränkt ist

$$u \leq a_n \leq o.$$





**Beispiel 1.1.2**

1. Gegeben sei die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{1}{2^n}$ . Es ist  $(a_n) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$ ; diese Folge ist streng monoton fallend und beschränkt durch  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ .
2. Gegeben sei die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \sqrt{n}$ . Es ist  $(a_n) = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\}$ ; diese Folge ist streng monoton wachsend und nach unten beschränkt durch  $u = 1$ .
3. Gegeben sei die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{n-1}{n}$ . Es ist  $(a_n) = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots\}$ ; diese Folge ist streng monoton wachsend und beschränkt durch  $0 \leq a_n \leq 1$ .

Da für Folgen die üblichen Rechenoperationen (Addition, skalare Multiplikation und Multiplikation von Folgen) definiert sind, setzen sich die soeben betrachteten Eigenschaften entsprechend der nachfolgenden Sätze fort.



**Satz 1.1.1** Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  gleichgerichtete monotone reelle Folgen und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann sind die Folgen

1.  $(a_n + b_n)$ ;
2.  $\alpha \cdot (a_n)$ ;
3.  $(a_n \cdot b_n)$

ebenfalls monoton. Für  $\alpha > 0$  bleibt die Richtung der Monotonie erhalten, für  $\alpha < 0$  kehrt sich die Richtung der Monotonie um.

**Satz 1.1.2**

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  beschränkte reelle Folgen und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann sind die Folgen

1.  $(a_n + b_n)$ ;
2.  $\alpha \cdot (a_n)$ ;
3.  $(a_n \cdot b_n)$

ebenfalls beschränkt.

## Konvergenz

Häufig soll untersucht werden, ob eine Folge über einen langen Zeitraum gegen einen bestimmten Wert strebt. Zur Beantwortung dieser Frage wird eine **Konvergenzuntersuchung** durchgeführt. Kommen die Glieder  $a_n$  der Folge mit wachsendem Index  $n$  einem Grenzwert  $a$  beliebig nahe, so nennt man die Zahlenfolge  $(a_n)$  **konvergent**.

### Definition 1.1.3

Eine Folge  $(a_n)$  heißt **konvergent mit dem Grenzwert  $a$** , falls zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Zahl  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$\text{für alle } n \geq n_\epsilon \text{ gilt } |a_n - a| < \epsilon.$$

Man schreibt dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ . Eine Folge, die nicht konvergent ist, nennt man **divergent**.



Obige Aussage muss dabei für jedes  $\epsilon > 0$  erfüllbar sein. Je kleiner  $\epsilon$  gewählt wird, umso größer wird der Index  $n_\epsilon$ , ab welchem die Bedingung erfüllt ist.

### Beispiel 1.1.3

Betrachtet werde die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{1}{n}$ . Es ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

*Beweis:* Sei  $\epsilon > 0$  sehr klein und  $n_\epsilon > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ , dann folgt

$$\text{für alle } n \geq n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon} \text{ gilt } \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\epsilon} < \frac{1}{\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^2} = \epsilon.$$

Der Begriff der **Divergenz** wird häufig zusätzlich unterschieden in *echte Divergenz* und *uneigentliche Konvergenz*.



### Definition 1.1.4

Sei  $(a_n)$  eine Folge. Dann ist

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , falls für alle  $M > 0$  ein  $n_M \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $n \geq n_M$  gilt  $a_n > M$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , falls für alle  $M > 0$  ein  $n_M \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $n \geq n_M$  gilt  $a_n < -M$ .



Diese Aussagen müssen für alle positiven Werte von  $M$ , insbesondere für sehr große Werte, erfüllt sein. Sie werden daher umgangssprachlich auch gesprochen als *die Folge wächst über bzw. fällt unter alle Schranken*.

Bei den meisten Folgen ist der Grenzwert anhand der expliziten Darstellung der Folge leicht ablesbar. Im folgenden Beispiel sind Grenzwerte häufig verwendeter Folgen angegeben.



### Beispiel 1.1.4

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0$  für  $a > 0$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = \infty$  für  $a > 0$ . Die Folge ist uneigentlich konvergent.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{a^n} = 0$  für  $a > 1$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e = 2,7182818\dots$
- Die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$  ist divergent, sie oszilliert zwischen  $-1$  und  $1$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$ .



### Satz 1.1.3

Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent.



### Beispiel 1.1.5

Gegeben sei die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = 4 - \frac{1}{n}$ . Es ist  $(a_n) = \{3; \frac{7}{2}; \frac{11}{3}; \frac{15}{4}; \dots\}$ . Diese Folge ist monoton wachsend, da

$$4 - \frac{1}{n+1} \geq 4 - \frac{1}{n}.$$

Sie ist ferner beschränkt durch

$$3 \leq a_n \leq 4 \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4.$$

Auch für zusammengesetzte Folgen werden Grenzwerte gesucht. Die folgenden **Grenzwertsätze** erleichtern die Bestimmung.

**Satz 1.1.4**

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente Folgen mit den Grenzwerten  $a$  und  $b$  und sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gelten:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm \alpha) = a \pm \alpha;$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot a;$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b;$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b;$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b},$   
wobei  $b_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $b \neq 0$

**Beispiel 1.1.6**

1. Gegeben sei die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{n-1}{n} \right)$ . Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1.$$

Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 0 \cdot 1 = 0.$$

2. Gegeben sei die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{n^2 - (n-1)^2}{n}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2 - (n-1)^2}{n} = \frac{n^2 - (n^2 - 2n + 1)}{n} = \frac{n^2 - n^2 + 2n - 1}{n} \\ &= \frac{n(2 - \frac{1}{n})}{n} = 2 - \frac{1}{n}; \end{aligned}$$

also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 - 0 = 2.$$



Ein Sonderfall liegt bei Folgen vor, welche in Zähler und Nenner Polynome enthalten.

### Bemerkung 1.1.2

Besteht die Folge aus Polynomen in Zähler und Nenner, so gilt

- Ist die höchste Potenz des Zählers **größer** als die höchste Potenz des Nenners, dann konvergiert die Folge uneigentlich gegen  $\pm$  Unendlich.
- Ist die höchste Potenz des Zählers **kleiner** als die höchste Potenz des Nenners, dann konvergiert die Folge gegen Null.
- Stimmt die höchste Potenz des Zählers mit der höchsten Potenz des Nenners überein, so konvergiert die Folge gegen den Quotienten der beiden führenden Koeffizienten.

Diese Vorgehensweise lässt sich auch auf Exponentialausdrücke übertragen.



### Beispiel 1.1.7

1. Betrachtet werde die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{2n^3 - n^2 + 45}{n^3 + 4n^2 - 6}$ . Es ist

$$a_n = \frac{n^3 \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{45}{n^3}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{4}{n} - \frac{6}{n^3}\right)} = \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{45}{n^3}}{1 + \frac{4}{n} - \frac{6}{n^3}}.$$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{45}{n^3} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n^3} = 0$ , folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{1}.$$

2. Es ist  $a_n = \frac{n+5}{n^3 - n^2 + 23} \rightarrow 0$ .

3. Es ist  $a_n = \frac{n^5 - n^3 + 2n}{n^2 + 4n - 75} \rightarrow \infty$ .

4. Gegeben sei die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = n \cdot \left(\frac{n^3 - 1}{n^3} - \frac{n(n-1)}{n^2}\right)$ .

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } a_n &= n \cdot \left(\frac{n^3 - 1}{n^3} - \frac{n^2 - n}{n^2}\right) = n \cdot \left(\frac{n^3 - 1}{n^3} - \frac{n^3 - n^2}{n^3}\right) = n \cdot \left(\frac{n^3 - 1 - n^3 + n^2}{n^3}\right) \\ &= n \cdot \frac{n^3 - 1 - n^3 + n^2}{n^3} = n \cdot \frac{n^2 - 1}{n^3} = \frac{n^3 - n}{n^3} \text{ und daher ist} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

## 1.1.2 spezielle Folgen

In diesem Abschnitt werden besondere Folgen vorgestellt und wesentliche Anwendungen erläutert.

### Definition 1.1.5

- Eine Folge, deren Glieder alle übereinstimmen, wird **konstante Folge** genannt.

$$a_n = a_1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- Eine Folge, deren Werte abwechselnd positiv und negativ sind, heißt **alternierende Folge**.

$$a_n \cdot a_{n+1} < 0 \text{ bzw. } a_n = (-1)^n b_n \text{ für eine nicht alternierende Folge } (b_n).$$

- Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt **Nullfolge**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$



Für die oben genannten Folgen gelten folgende Zusammenhänge.

### Bemerkung 1.1.3

- Eine konstante Folge ist immer beschränkt und konvergent.
- Eine alternierende Folge ist nicht monoton.

### Beispiel 1.1.8

1. Die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = 2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist konstant.
2. Die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{1}{2^n}$  ist eine Nullfolge.
3. Die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{1}{3^n}$  ist eine Nullfolge.
4. Die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$  ist eine alternierende Folge mit dem Grenzwert 0.



Die ökonomischen Anwendungsgebiete der Folgen lassen sich in weiten Teilen auf zwei spezielle Folgen zurückführen, welche im Folgenden vorgestellt werden.