Wirtschaftsmathematik

Musteraufgaben mit Musterlösungen

Emil Larek

2., erweiterte und verbesserte Auflage

Frank & Timme

Verlag für wissenschaftliche Literatur

Emil Larek   Wirtschaftsmathematik

Emil Larek

Wirtschaftsmathematik

Musteraufgaben mit Musterlösungen

2., erweiterte und verbesserte Auflage

Frank & Timme
Verlag für wissenschaftliche Literatur

2., verbesserte und erweiterte Auflage
(1. Aufl. 2008 ISBN 978-3-86596-196-9)

ISBN 978-3-86596-480-9

Herstellung durch das atelier eilenberger, Taucha bei Leipzig.
Printed in Germany.
Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier.

www.frank-timme.de

Inhaltsverzeichnis

Symbole und Konstanten

N, Q, R	Menge der natürlichen, rationalen bzw. reellen Zahlen
$a \in$ M	a ist Element der Menge M
$a \notin$ M	a ist kein Element von M
$\subseteq$	Teilmenge von
$=, \neq$	ist gleich, ist ungleich
Σ	Summe von
$\prod$	Produkt von
∞	unendlich
$\wedge, \vee$	und, oder
$\leq, \geq$	kleiner oder gleich, größer oder gleich
$\ldots$	und so weiter
$\exists$	es existiert ..., es gibt mindestens ein ...
$\forall$	für alle ...
$n!$	n Fakultät $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)$
$\frac{d\,\cdot}{dx}$	gewöhnliche Ableitung nach x
$\frac{\partial\,\cdot}{\partial x}$	partielle Ableitung nach x
$\int \cdot\, dx$	Integral
π	Mathematische Konstante, π = 3,141 592 653 589 ...
e	Euler'sche Zahl, e = 2,718 281 828 459 ...
$\sum_{i=1}^{n} l_i = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$	Summe
$min(g_j)$	Minimum aller g_j
$\boldsymbol{a}$	Spaltenvektor
$\boldsymbol{a}^{\mathbf{o}}$	Einheitsvektor
$\boldsymbol{a}^{\mathbf{T}}$	Zeilenvektor
$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$	Betrag des Vektors $\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{A} = (a_{ik})$	Matrix
$\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}$	transponierte Matrix
$\boldsymbol{A}^{\mathbf{-1}}$	inverse Matrix
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert = \det(\boldsymbol{A})$	Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$
$Rang(\boldsymbol{A}) = rg(\boldsymbol{A})$	Rang der Matrix $\boldsymbol{A}$
ME	Mengeneinheiten
$\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{o}$	Nullmatrix , Nullvektor
$\boldsymbol{E}$	Einheitsmatrix
$\boldsymbol{x}_{\mathbf{B}}$	Vektor der Basisvariablen
$\boldsymbol{x}_{\mathbf{N}}$	Vektor der Nichtbasisvariablen
$\boldsymbol{x}^{\mathbf{s}}$	Vektor der Schlupfvariablen

Abkürzungen

BV	Basisvariable
HE	Hauptelement
HS	Hauptspalte
HZ	Hauptzeile
NBV	Nichtbasisvariable
NB	Nebenbedingung
NNB	Nichtnegativitätsbedingung

Einleitung

Es ist unbestritten, dass in einem wirtschaftswissenschaftlichen Studium mathematische Grundlagen einen wichtigen Platz einnehmen. Der Studierende merkt bald, welchen Nutzen er beim Studium der volks- und betriebswirtschaftlichen Fächer aus seinen mathematischen Kenntnissen ziehen kann oder welche Lücken aus dem Grundstudium zu schließen sind. Es ist ein übergreifendes Wissen über die bekannten Methoden und Verfahren einerseits mit dem Detailwissen der zu verwendenden Arbeitsschritte andererseits zu vereinen. Diese Vielfalt an möglichen Kombinationen ist nur schwer darstellbar.

Die gemeinsame Darstellung von mathematisch-theoretischen Grundlagen und deren Anwendung in der Wirtschaft soll die Modellierung ökonomischer Situationen erleichtern und das Abstraktionsvermögen des Lesers schulen. In den Beispielen (oder Übungen) wird eine Festigung des mathematischen Wissens angestrebt, und gleichzeitig sollen weitere Anwendungsmöglichkeiten diskutiert werden. Die vereinfachte Darstellung reduziert die praktischen Probleme mit mathematischen Formeln auf das Wesentliche der Ökonomie. Diese Grundkenntnisse zur Modellierung ökonomischer Prozesse können dann im wirtschaftswissenschaftlichen Hauptstudium genutzt und erweitert werden.

In Fachbüchern ist kaum der Platz für ausführliche Beschreibungen des Lösungsweges einzelner Aufgaben vorhanden. Für zwei oder mehr Beispiele zu einem Aufgabentyp reicht der vorhandene Platz schon gar nicht. Beispielaufgaben demonstrieren meistens einen bestimmten Sachverhalt, der vorher theoretisch erklärt wird.

In Aufgabenstellungen, sei es in der Praxis oder vielleicht auch nur in der Prüfung, werden häufig vom Bearbeiter verschiedene theoretische Grundlagen verlangt, die dann nach systematischer Anwendung in mehreren Schritten zur Lösung führen. Das können Verfahren sein, die in dem gerade behandelten Kapitel nicht enthalten sind. Als Beispiele mögen die Lösung von linearen Gleichungssystemen bei der Methode der kleinsten Quadrate oder die Nullstellensuche eines Polynoms bei der Eigenwertberechnung genügen.

Mit den Musterlösungen möchte ich dem Wunsch zahlreicher Studierender nachkommen, die Lösungswege von Beispielaufgaben etwas ausführlicher darzustellen. Es werden zu Beginn Aufgaben vorgestellt, die der Leser zunächst ohne Hilfen selbstständig lösen kann. In einem zweiten Teil wird dann sehr ausführlich ein Lösungsweg in allen seinen Schritten beschrieben. Die Aufgaben sind so formuliert, dass sie als Prüfungsaufgabe vorkommen können. Die fälligen Nebenrechnungen sind aus der Sicht einer Übungsaufgabe geplant. In der praktischen Anwendung können natürlich wesentlich umfangreichere Nebenrechnungen notwendig werden.

Den Anstoß zu dieser Sammlung gab eine Liste von geschriebenen Prüfungsaufgaben, die von den Prüflingen nur mit großer Mühe oder überhaupt nicht bearbeitet wurden. Die Auswahl der Aufgaben ist noch übersichtlich und überstreicht nur einige wichtige Grundlagen. Eine Ergänzung mit weiteren Aufgaben insbesondere zur linearen Algebra und zur linearen Optimierung konnte vorgenommen werden. Bei dieser ausführlichen Darstellung der Lösungswege muss immer auch die Gesamtseitenzahl und somit die Gesamtzahl der Aufgaben berücksichtigt werden.

Es werden typische Aufgaben aus der Wirtschaftsmathematik mit sehr ausführlichen Darstellungen des Lösungsweges gezeigt. Die Lösungsverfahren folgen der Vorlesung „Analysis I & II“, die nach dem Buch von E. Larek „Analytische Methoden in der Wirtschaft“ vom Peter-Lang-Verlag gehalten wird, sowie der Vorlesung „Lineare Algebra und lineare Optimierung“, die nach dem Buch von E. Larek „Lineare Systeme in der Wirtschaft“ vom Peter-Lang-Verlag gehalten wird.

Die Aufgaben sind nach vier Schwerpunkten sortiert:

1. Analysis I, Funktionen einer Variablen
2. Analysis II, Funktionen mehrerer Variablen
3. Lineare Algebra
4. Lineare Optimierung

Bei der Bearbeitung der Aufgaben sollte der Leser auch auf Rechenfertigkeiten (z.B. bei Berechnungen mit dem Taschenrechner) Wert legen, da in den Prüfungen für die Lösung nur ein begrenzter Zeitfond zur Verfügung steht. In der vorgegeben Gesamtzeit sind dann auch mehrere Aufgaben mit sehr verschiedenen Verfahren zu lösen.

Es ist zu wünschen, dass dieses Buch ein Beitrag zum Abbau der Ängste vor der Mathematik mit seinen Methoden und Modellen wird. Die Wirtschaftsmathematik möchte eine Brücke zwischen den vielen Möglichkeiten aus der Mathematik und den zahlreichen Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften sein und dem Leser mit diesen Musterbeispielen Mut für weitere Studien machen.

Emil Larek

1 Musteraufgaben

1.1 Analysis I

Aufgabe 1.1
Untersuchen Sie die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = 3$ auf Stetigkeit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x < 1 \\ (x-1)^2 & \textit{für} \quad 1 \le x < 3 \\ (x-5)^2 & \textit{für} \quad 3 \le x < 5 \\ 0 & \textit{für} \quad 5 \le x \end{cases}.$$

Aufgabe 1.2
Untersuchen Sie die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = -1$ auf Stetigkeit

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \ .$$

Aufgabe 2.1
Wie heißt die erste Ableitung von

$$y = \sqrt{x} \cdot \ln x \text{ ?}$$

Aufgabe 2.2
Wie heißt die erste Ableitung von

$$y = \frac{x^2 + 6x + 9}{3x + 4} \text{ ?}$$

Aufgabe 2.3
Wie heißt die erste Ableitung von

$$y = \sqrt{1 - x^2} \text{ ?}$$

Aufgabe 3.1
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen $f(x) = x^2 - 7x - \ln x$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens auf vier Stellen hinter dem Komma genau.

Aufgabe 3.2
Man berechne alle Lösungen der Gleichung

$$x - \cos(x) = 1$$

mit Hilfe des Newton-Verfahrens auf vier Stellen hinter dem Komma genau.

Aufgabe 3.3
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen $f(x) = x^2 - 7x - \ln x$ mit Hilfe des Verfahrens Regula Falsi auf vier Stellen hinter dem Komma genau.

Aufgabe 3.4
Man berechne alle Lösungen der Gleichung

$$x - \cos(x) = 1$$

mit Hilfe des Verfahrens Regula Falsi auf vier Stellen hinter dem Komma genau.

Aufgabe 3.5

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen $f(x) = x^2 - 7x - \ln x$ mit Hilfe der Fixpunktiteration auf vier Stellen hinter dem Komma genau.

Aufgabe 3.6

Man berechne alle Lösungen der Gleichung

$$x - \cos(x) = 1$$

mit Hilfe der Fixpunktiteration auf vier Stellen hinter dem Komma genau.

Aufgabe 4.1

Ein Produzent befindet sich in Monopolstellung. Er möchte aus dem Umsatz $U(x)$ und den Kosten $K(x)$ in Abhängigkeit von der produzierten Menge x einige Schlussfolgerungen für sein Unternehmen ableiten.

Als Kostenfunktion nimmt der Produzent $K(x) = 500 + 90x - x^2 + 0{,}01x^3$ als Funktion von der produzierten Menge x an.

Mit der Preisfunktion $p(x) = 165 - x$ und ergibt sich daraus folgende Umsatzfunktion

$$U(x) = p(x) \cdot x\,.$$

Als Gewinnfunktion wird

$$G(x) = U(x) - K(x)$$

angenommen.

Alle Zahlen gelten für eine bestimmte Produktionsperiode.

Als Kapazitätsgrenze wird $x = 100$ Stück pro Periode angenommen.

Wo liegen die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze?

Wie groß ist das Gewinnmaximum?

Wo befindet sich das Maximum des Durchschnittsgewinns?

Aufgabe 4.2

Man bestimme die Wachstumsrate der Funktion $f(x) = 2 \cdot \dfrac{(x-3)^2}{x} + 3$ an den Stellen $x_0 = 6$ und $x_0 = 7$.

Aufgabe 4.3

Eine Funktion $e(x) = \dfrac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$ ist für verschiedene Funktionen $f(x)$ in der Wirtschaft interessant. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 7$.

Welcher Wert ergibt sich für $e(x)$ an der Stelle $x = 3{,}6$?

Aufgabe 5.1

Gesucht ist die Darstellung der Funktion $y = f(x) = 2^x$ mittels Taylor-Reihe an der Stelle $x_0 = 0$.

Man benutze unterschiedlich viele Ableitungen und vergleiche die Übereinstimmung der Taylor-Reihe mit der Ausgangsfunktion für $x = 0{,}9$.

Es werden bis zu drei Ableitungen verwendet.

Aufgabe 5.2

Gesucht ist die Darstellung der Funktion $y = f(x) = \sqrt{2+x}$ mittels Taylor-Reihe an der Stelle $x_0 = 0$.

Man benutze unterschiedlich viele Ableitungen und vergleiche die Übereinstimmung der Taylor-Reihe mit der Ausgangsfunktion für $x = 0{,}9$.

Es werden bis zu drei Ableitungen verwendet.

Aufgabe 6.1

Man untersuche die Funktion $f(x) = \sqrt[x]{2 \cdot x}$ auf lokale Extremwerte.

Aufgabe 6.2

Man untersuche die Funktion $f(x) = x^4 \cdot e^{3-x}$ auf lokale Extremwerte.

Aufgabe 7.1

Man berechne das bestimmte Integral $\int\limits_0^2 \sqrt[3]{4-2x}\,dx$.

Aufgabe 7.2

Man berechne das bestimmte Integral $\int\limits_0^{\pi} x^2 \cdot \sin(x)\,dx$.

Aufgabe 7.3

Man berechne das bestimmte Integral $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^x \cdot \cos(x)\,dx$.

Aufgabe 7.4

Man bestimme das Integral $\int\limits_1^3 x^2 \cdot e^{2-x}\, dx$ mittels numerischer Verfahren.

Aufgabe 7.5

Man bestimme das Integral $\frac{1}{3}\int\limits_0^3 x^3 \cdot e^{2-x}\, dx$ mittels numerischer Verfahren.

1.2 Analysis II

Aufgabe 1.1

Gegeben ist die Funktion $R = R(p,q) = p \cdot (p^2 + \frac{4}{3}) - q \cdot (2p - q + 4)$.

Man bestimme für die Funktion R mit den Variablen p und q alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Schreiben Sie
a) den Gradienten und
b) die Hessematrix auf.

Aufgabe 1.2

Gegeben ist die Funktion $W = W(K,L,R) = K^3 \cdot \cos(L + R^2)$.

Man bestimme für die Funktion W mit den Variablen K, L und R alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Schreiben Sie
a) den Gradienten und
b) die Hessematrix auf.

Aufgabe 2.1

Bei einer Materialprüfung wird der Wert für $S(h_1,h_2)$ aus der folgenden Beziehung

$$S(h_1,h_2) = \frac{E \cdot h_2^3}{12 \cdot h_1} \cdot \frac{1}{r \cdot (h_1 + h_2)} \cdot F$$

untersucht.

Die Materialgrößen $E = 8.000$, $F = 1{,}5$ und $r = 10$ sind exakt bekannt.

Die Messwerte für $h_1 = 0{,}1$ und $h_2 = 0{,}4$ werden durch eine Versuchsreihe ermittelt.

Für den Wert von h_1 gilt eine Fehlertoleranz von $\pm 1\%$ und für den Wert von h_2 gilt eine Fehlertoleranz von $\pm 2\%$.

Man bestimme die absolute Maximalabweichung für $S(h_1,h_2)$ bei den gegebenen Ungenauigkeiten von h_1 und h_2.
Wie groß ist die relative Abweichung (der relative Fehler) für $S(h_1,h_2)$?

Aufgabe 2.2

Die relative Stillstandszeit einer Maschine (das Verhältnis von Stillstandszeit zur gesamten Einsatzzeit) lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise unter Verwendung zweier Parameter A und B durch folgenden funktionalen Zusammenhang beschreiben:

$$S(x,A,B) = 1 - \frac{1 + e^A}{1 + e^{A+Bx}}.$$

Die Parameter A und B sind spezifische Größen für einen bestimmten Maschinentyp und werden entsprechend aus Beobachtungswerten gewonnen.
In einem Spezialfall sei für A = 0,74 und für B = 0,26 ermittelt worden, wobei A mit einem Fehler von 3 % und B mit einem Fehler von 8 % behaftet sein können.

Für den Zeitpunkt x = 4 soll der maximale relative Fehler der durch den gegebenen funktionalen Zusammenhang errechneten Stillstandszeit angegeben werden.

Aufgabe 3.1
Für die Ermittlung der Werkzeugkosten W_{St} je Stunde Standzeit einer Anlage wird die folgende Funktion benutzt

$$W_{St} = W_{St}(K_I, t_s) = \frac{(A-R)+K_I}{Z_s \cdot t_s}.$$

Hierbei sind:

Anschaffungskosten	A	=	75.000 €
Restwert	R	=	5.800 €
Kosten der Instandsetzung	K_I	=	30.000 €
Zahl der Standzeiten	Z_s	=	37
mittlere Standzeit	t_s	=	1,5 h

a) Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung nach K_I und t_s .

b) Bestimmen Sie die Elastizitäten der Werkzeugkosten je Stunde $W_{St}(K_I, t_s)$ bezüglich der Kosten der Instandsetzung K_I und der mittleren Standzeit t_s.

Aufgabe 3.2
Für die Ermittlung des Kaufpreises für ein Unternehmen U_w wird bei der Methode der Übergewinnkapitalisierung die folgende Funktion benutzt

$$U_W = U_W(i,j) = R_W + \frac{G - i \cdot R_W}{j}.$$

Hierbei sind:

Unternehmenswert(Kaufpreis)	U_w		
Reproduktionswert(Substanzwert)	R_w	=	3.000.000 €.
Jährlicher Gewinn	G	=	200.000 €.
Kalkulationszinssatz	i	=	0,1
Risikozinssatz für Übergewinne	j	=	0,15

a) Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung nach i und j.
b) Bestimmen Sie die Elastizitäten des Unternehmenswertes $U_W = U_W(i,j)$ bezüglich des Kalkulationszinssatzes i und des Risikozinssatzes j.
c) Der jährliche Gewinn des Unternehmens betrage 400.000 €. Bestimmen Sie die Elastizitäten des Unternehmenswertes $U_W = U_W(i,j)$ bezüglich des Kalkulationszinssatzes i und des Risikozinssatzes j.

Aufgabe 4.1
Gegeben ist die Funktion $R = R(p,q) = p \cdot (p^2 + \frac{4}{3}) - q \cdot (2p - q + 4)$.

a) Man bestimme für die Funktion R mit den Variablen p und q alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Schreiben Sie den Gradienten und die Hessematrix auf.
b) Man untersuche diese Funktion auf relative Extremwerte.

Aufgabe 4.2
Gegeben ist die Funktion $U = U(x,y,z) = -x^2 - y^2 - \frac{3}{2}z^2 + 2xz + 2y - 6z$.

a) Man bestimme für die Funktion U mit den Variablen x, y und z alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Wie lauten der Gradient und die Hessematrix?
b) Man untersuche diese Funktion auf relative Extremwerte.

Aufgabe 5.1

Ein betriebswirtschaftlicher Zusammenhang zwischen den Kosten und dem sonstigen Verbrauch soll aus einer Beobachtungsserie funktionell dargestellt werden.

s_k	1	5	3	2	7
K_k	9	5	6	8	4

Als Funktion werden die Kosten K in Abhängigkeit vom sonstigen Verbrauch s

$K(s) = A + B \cdot \frac{1}{s}$ angenommen.

Bestimmen Sie entsprechend der gegebenen Messwerte die Koeffizienten A und B der Regressionsfunktion $\hat{K}(s) = A + B \cdot \frac{1}{s}$.

Welche Kosten K sind für $s = 7{,}5$ zu erwarten?

Aufgabe 5.2

Ein betriebswirtschaftlicher Zusammenhang zwischen den Kosten und dem sonstigen Verbrauch und den Mietkosten soll aus einer Beobachtungsserie funktionell dargestellt werden.

x_{1k}	1	2,1	2	2,2	4	5,1	1	3,4	2	1
x_{2k}	1,1	4	9,2	9	1,3	4	5,1	9	1,1	4,1
K_k	0,2	6,1	5,3	5,4	0,1	5,1	2,9	8,8	0,9	2,8

Als Funktion werden die Kosten K in Abhängigkeit vom sonstigen Verbrauch x_1 und den Mietkosten x_2 $K(x_1, x_2) = A + B \cdot x_1 + C \cdot \sqrt{x_2}$ angenommen.

Bestimmen Sie entsprechend der gegebenen Messwerte die Koeffizienten A, B und C der Regressionsfunktion $\hat{K}(x_1, x_2) = A + B \cdot x_1 + C \cdot \sqrt{x_2}$.

Welche Kosten K sind für $x_1 = 7{,}5$; $x_2 = 6{,}5$ zu erwarten?

1.3 Lineare Algebra

Aufgabe 1.1
Man bestimme die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 & 4 \\ -4 & 6 & -2 & 5 & -6 \\ 6 & -9 & 3 & -4 & 10 \\ 2 & -4 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

mit dem Entwicklungssatz von Laplace.

Aufgabe 1.2
Man bestimme die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 & 3 \\ -4 & 6 & -2 & 5 & -6 \\ 6 & -9 & 3 & -4 & 10 \\ 2 & -3 & 3 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

mit dem Entwicklungssatz von Laplace.

Aufgabe 2.1

Gegeben sind die Matrizen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Matrizen $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, wenn das möglich ist.
b) Welches Format haben die Matrizen $\boldsymbol{C}$ bzw. $\boldsymbol{D}$?

Aufgabe 2.2
In einem Unternehmen werden Zwischenprodukte (Z_j) zu Endprodukten (E_k) verarbeitet. Der Rohstoffbedarf für die Produktion der Zwischenprodukte und der Bedarf an Zwischenprodukten für die Endfertigung jeweils in Mengeneinheiten (ME) sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

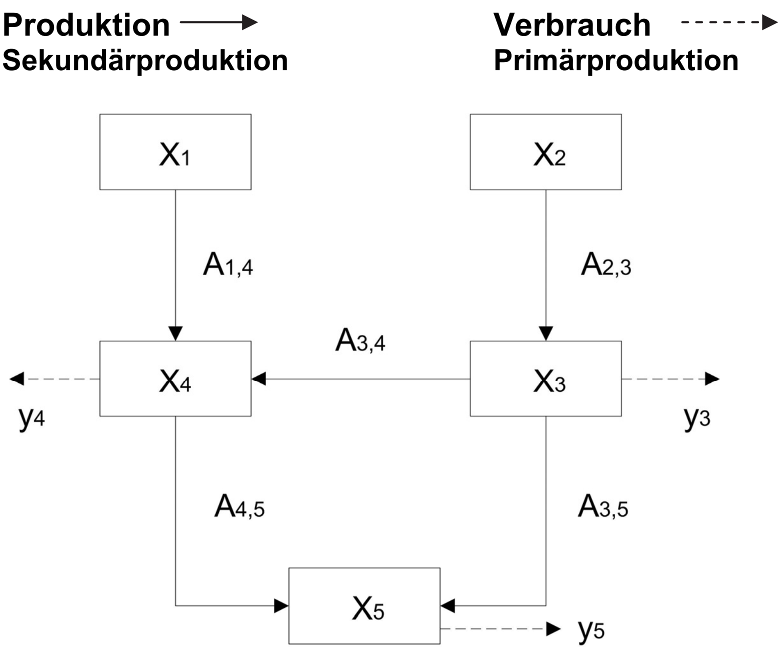
	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	3	1	3
R_2	1	2	4
R_3	3	0	1
R_4	1	2	3

	E_1	E_2	E_3	E_4
Z_1	1	2	1	0
Z_2	2	3	0	1
Z_3	1	2	1	2

a) Das Unternehmen hat Lieferverpflichtungen für die Endprodukte bei E_1 mit 175 ME, bei E_2 mit 175 ME, bei E_3 mit 125 ME und bei E_4 mit 125 ME.
Welche Mengen der Rohstoffe (R_i) werden für die Lieferverpflichtungen benötigt?
b) Wie erhöht sich der Rohstoffverbrauch, wenn ein zusätzlicher Bedarf bei den drei Zwischenprodukten von Z_1 mit 10 ME, Z_2 mit 15 ME bzw. Z_3 mit 5 ME besteht?

Aufgabe 2.3
Ein Unternehmen benutzt für die Herstellung bestimmter Produkte fünf verschiedene Standorte. Die Zwischenprodukte werden von einem Standort zum nächsten

transportiert. Außerdem werden nicht nur die Endprodukte sondern auch Zwischenprodukte für den Primärbedarf abgegeben.
Die Produktionskette kann schematisch wie folgt dargestellt werden.



Die Verflechtungsmatrizen sind bekannt

$$\boldsymbol{A_{1,4}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A_{2,3}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A_{3,4}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A_{3,5}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \boldsymbol{A_{4,5}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wie groß ist der Rohstoffverbrauch (R) für eine Endfertigung (E) von 2 ME von E_1, von 4 ME von E_2, von 6 ME von E_3, von 8 ME von E_4 und 10 ME von E_5, wenn auch an den Standorten 3 und 4 Zwischenprodukte zum Verbrauch bereitgestellt werden?
Am Standort 3 werden von den drei Zwischenprodukten je 2 ME, 3 ME und 4 ME abgegeben. Am Standort 4 werden von den vier Zwischenprodukten jeweils 2 ME abgegeben.

Aufgabe 3.1
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem und geben Sie die allgemeine Lösung in Vektorform an! Wie groß ist der Freiheitsgrad?

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 7 \\ -3x_1 & -3x_2 & -7x_3 & +3x_4 & = & -9 \end{array}$$

Geben Sie zwei mögliche ganzzahlige Lösungen mit nicht negativen Werten für alle x_i $i = 1,2,3,4$ an.

Aufgabe 3.2
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem und geben Sie die allgemeine Lösung in Vektorform an! Wie groß ist der Freiheitsgrad?

$$\begin{array}{rrrrrcr} & x_2 & +5x_3 & -3x_4 & +2x_5 & = & 51 \\ -x_1 & +3x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 9 \\ 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 15 \\ x_1 & +3x_2 & +8x_3 & -5x_4 & +2x_5 & = & 75 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 27 \end{array}$$

Geben Sie zwei mögliche ganzzahlige Lösungen mit nicht negativen Werten für alle x_i $i = 1,2,3,4,5$ an.

Aufgabe 4.1

Aus der Gleichung $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} - 2\boldsymbol{X}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & -5 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

ist die Matrix $\boldsymbol{X}$ zu bestimmen.

Aufgabe 4.2

In einem Unternehmen werden Halbprodukte (H) eines Teilbetriebes zu Endprodukten (E) verarbeitet. Der Materialverbrauch (M) des Teilbetriebes und der Bedarf an Halbprodukten für die Endfertigung sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

alle Angaben in Mengeneinheiten ME !	Materialverbrauch des Teilbetriebes			Verbrauch an Halbprodukten bei der Endfertigung		
	M_1	M_2	M_3	E_1	E_2	E_3
Halbprodukt H_1	1		1	1		
Halbprodukt H_2	1	1		1	1	
Halbprodukt H_3		1	1		1	1
Halbprodukt H_4	1					1

An Rohmaterial sind die Mengen $M_1 = 800$, $M_2 = 680$ und $M_3 = 590$ ME vorhanden.
Welche Mengen des Endproduktes (E) können produziert werden, wenn von den Halbprodukten $y_{21} = 10$, $y_{22} = 22$ und $y_{23} = 50$ und $y_{24} = 20$ ME und vom Rohmaterial $y_{11} = 100$, $y_{12} = 200$ und $y_{13} = 150$ ME zusätzlich abgegeben werden sollen?

Aufgabe 5.1

Man bestimme für die Matrix $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte.

Wie lautet der Eigenvektor, der zum größten Eigenwert gehört?
Hinweis: Der Eigenvektor ist als Einheitsvektor anzugeben.

Aufgabe 5.2

Man bestimme für die Matrix $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte.

Wie lautet der Eigenvektor, der zum größten Eigenwert gehört?
Hinweis: Der Eigenvektor ist als Einheitsvektor anzugeben.

1.4 Lineare Optimierung

Aufgabe 1.1
Ein Farmer bewirtschaftet 400 ha Ackerland. Er baut Raps, Mais und Roggen auf diesen Flächen an. Er hat für die Bearbeitung, Aussaat und Ernte insgesamt 80 T€ zur Verfügung, die er, auf 300 Arbeitstage verteilt, einsetzen kann.

	Raps	Mais	Roggen
Anbaukosten (€ je ha)	100	200	400
Arbeitstage (Tage je ha)	0,5	1	0,2
Gewinn (T€ je ha)	2	3	4

Mais soll auf höchstens 100 ha angebaut werden und die Anbaufläche für Raps soll mindestens 75% der Anbauflächen von Mais und Roggen zusammen betragen.
Wie viel ha sollte der Farmer von den einzelnen Fruchtarten anbauen, damit der Gesamtgewinn maximal wird?
Stellen Sie das mathematische Modell auf und geben Sie die zugehörige 1. Normalform an.

Aufgabe 1.2
In einem mechanischen Betrieb werden aus vorgefertigten Teilen drei Produkte A, B und C hergestellt. Für die Endmontage aller drei Produkte wird eine gemeinsame Maschine benutzt, deren Maschinenzeit von maximal 120 h je Woche einen Engpass (Flaschenhals) darstellt.

	A	B	C
Verkaufspreis je Stück (€ je Stk.) p	14.000	12.000	10.000
Variable Kosten je Stück (€ je Stk.) k_v	13.000	9.000	6.000
Belastung der Maschine (h je Stk.)	1	2	3

Von jedem der Produkte A, B und C sollen mindestens 6 und höchstens 30 Stück je Woche hergestellt werden. Dem Betrieb entstehen 100.000€ je Woche an Fixkosten während der Produktion.
Mit welcher Stückproduktion erzielt der Betrieb den höchsten Bruttogewinn (absoluter Deckungsbeitrag $d = p - k_v$) ?
Stellen Sie das mathematische Modell auf und geben Sie die zugehörige 1. Normalform an.

Aufgabe 2.1
Gegeben ist das Optimierungsproblem $z = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{array}{llll} -x_1 & +x_2 & \leq & 9 \\ 6x_1 & +5x_2 & \leq & 60 \\ 2x_1 & +3x_2 & \geq & 12 \end{array}$$ mit $x_1 \geq 0$ und x_2 = beliebig.

Man löse dieses lineare Optimierungsproblem grafisch.

Aufgabe 2.2
Gegeben ist das Optimierungsproblem $z = 12x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{array}{rrcr} -x_1 & +x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & +3x_2 & \geq & 6 \\ x_1 & +2x_2 & \leq & 10 \\ -3x_1 & +x_2 & \leq & 12 \end{array}$$

mit x_1 und x_2 = beliebig.

Man löse dieses lineare Optimierungsproblem grafisch.

Aufgabe 3.1
Die Zusammenstellung aller Aussagen ergibt das mathematische Modell für ein lineares Optimierungsproblem mit einer Zielfunktion, fünf Nebenbedingungen und gültigen Nichtnegativitätsbedingungen für die drei vorkommenden Variablen x_1, x_2 und x_3.

Zielfunktion $\quad z = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 400$$
$$100 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 + 400 \cdot x_3 \leq 80.000$$
$$0{,}5 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0{,}2 \cdot x_3 \leq 300$$
$$x_2 \leq 100$$
$$4x_1 - 3x_2 - 3x_3 \geq 0$$

Nichtnegativitätsbedingung $\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Wie lautet die 1. Normalform dieses linearen Optimierungsproblems?
Lösen Sie diese Aufgabe mit dem Simplexalgorithmus.

Aufgabe 3.2
Gegeben ist die Optimierungsaufgabe mit einer Zielfunktion, drei Nebenbedingungen und gültigen Nichtnegativitätsbedingungen für die vier vorkommenden Variablen x_1, x_2, x_3 und x_4.

Zielfunktion $\quad z = 2 \cdot x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min$

Nebenbedingungen
$$2x_1 + x_3 - 2x_4 \leq 8$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -3$$
$$-x_1 + x_3 + x_4 = 5$$

Nichtnegativitätsbedingung $\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

Wie lautet die 1. Normalform dieses linearen Optimierungsproblems?
Lösen Sie diese Aufgabe mit dem Simplexalgorithmus.

Aufgabe 3.3
Die Zusammenstellung aller Aussagen ergibt das mathematische Modell für ein lineares Optimierungsproblem mit einer Zielfunktion, drei Nebenbedingungen und gültigen Nichtnegativitätsbedingungen für die drei vorkommenden Variablen x_1, x_2 und x_3.

Zielfunktion $\quad$ (*.1) $\quad z = 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen $\quad$ (*.2) $\quad x_1 + x_2 \leq 4$

(*.3) $\quad x_1 + 2 \cdot x_3 \leq 8$

(*.4) $\quad x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 10$

Nichtnegativitätsbedingung $\quad$ (*.5) $\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Wie lautet die 1. Normalform dieses linearen Optimierungsproblems?
Lösen Sie diese Aufgabe mit dem Simplexalgorithmus.

Aufgabe 3.4
Die Zusammenstellung aller Aussagen ergibt das mathematische Modell für ein lineares Optimierungsproblem mit einer Zielfunktion, sieben Nebenbedingungen und gültigen Nichtnegativitätsbedingungen für die drei vorkommenden Variablen x_1, x_2 und x_3.

Zielfunktion	(*.1)	$z = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 100 \to \max$
Nebenbedingungen	(*.2)	$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \le 120$
	(*.3)	$x_1 \ge 6$
	(*.4)	$x_1 \le 30$
	(*.5)	$x_2 \ge 6$
	(*.6)	$x_2 \le 30$
	(*.7)	$x_3 \ge 6$
	(*.8)	$x_3 \le 30$
Nichtnegativitätsbedingung	(*.9)	$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$

Wie lautet die 1. Normalform dieses linearen Optimierungsproblems?
Lösen Sie diese Aufgabe mit dem Simplexalgorithmus.

Aufgabe 3.5
Die Zusammenstellung aller Aussagen ergibt das mathematische Modell für ein lineares Optimierungsproblem mit einer Zielfunktion, vier Nebenbedingungen und den beiden vorkommenden Variablen x_1 und x_2, die die Nichtnegativitätsbedingung nicht erfüllen.

Zielfunktion	(*.1)	$z = 12 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 \to \min$
Nebenbedingungen	(*.2)	$-x_1 + x_2 \quad \le 8$
	(*.3)	$x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 6$
	(*.4)	$x_1 + 2 \cdot x_2 \le 10$
	(*.5)	$-3 \cdot x_1 + x_2 \le 12$
Nichtnegativitätsbedingung	(*.6)	x_1, x_2 beliebig

Wie lautet die 1. Normalform dieses linearen Optimierungsproblems?
Lösen Sie diese Aufgabe mit dem Simplexalgorithmus.

Aufgabe 3.6
Die Zusammenstellung aller Aussagen ergibt das mathematische Modell für ein lineares Optimierungsproblem mit einer Zielfunktion, drei Nebenbedingungen und gültigen Nichtnegativitätsbedingungen für die vorkommenden Variablen x_1 und x_2.

Zielfunktion	(*.1)	$z = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \min$
Nebenbedingungen	(*.2)	$x_1 + 3x_2 \quad \ge 18$
	(*.3)	$x_1 + x_2 \quad \ge 12$
	(*.4)	$2x_1 + x_2 \quad \ge 16$
Nichtnegativitätsbedingung	(*.5)	$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Lösen Sie diese Aufgabe mit dem Simplexalgorithmus.

2 Musterlösungen

2.1 Analysis I

Aufgabe 1.1
Untersuchen Sie die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = 3$ auf Stetigkeit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x < 1 \\ (x-1)^2 & \textit{für} \quad 1 \le x < 3 \\ (x-5)^2 & \textit{für} \quad 3 \le x < 5 \\ 0 & \textit{für} \quad 5 \le x \end{cases}.$$

Lösung

Eine Funktion $y = f(x)$ ist an der Stelle $x = a$ stetig, wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

gilt.
Es ist eine Bedingung, dass der Punkt $a \in \mathrm{R}$ und jede Umgebung $U(a) \in \mathrm{R}$ zum Definitionsbereich D_f einer Funktion $y = f(x)$ gehören.

Eine Funktion $y = f(x)$ ist in einem Punkt $x = a$ stetig, wenn
1. die Funktion $y = f(x)$ in a definiert ist und $f(a)$ existiert,
2. der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ existieren und übereinstimmen $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ und
3. die Grenzwerte mit dem Funktionswert $f(a)$ übereinstimmen
$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$.

Zum Nachweis der Stetigkeit einer Funktion $y = f(x)$ in einem Punkt $x = a$ sind diese drei Nachweise zu führen.

Stimmt der Grenzwert mit dem Funktionswert an der Stelle 3 überein $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$?

Zunächst wird der Funktionswert $f(3)$ bestimmt.

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x < 1 \\ (x-1)^2 & \textit{für} \quad 1 \le x < 3 \\ (x-5)^2 & \textit{für} \quad 3 \le x < 5 \\ 0 & \textit{für} \quad 5 \le x \end{cases}$ ist abschnittsweise definiert. Der Definitionsbereich besteht aus vier Teilintervallen, die die Menge der reellen Zahlen überall dicht beinhalten $D_f = \{x \in R\}$. Die Stelle $x_0 = 3$ liegt im dritten Intervall $3 \le x < 5$, für das der Teil $f(x) = (x-5)^2$ gilt.

Der Funktionswert an der Stelle $x_0 = 3$ berechnet sich nach $f(3) = (3-5)^2$ und ergibt den Wert 4 $f(3) = 4$.

Dann wird der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ bestimmt.
Eine Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle $x = a$ den Grenzwert F, wenn für jede beliebige Zahlenfolge $\{x_n\}$ aus dem Definitionsbereich D der Funktion mit dem Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ die zugehörige Folge der Funktionswerte $\{f(x_n)\}$ den Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \mathrm{F}$ hat.

Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ existiert nur dann, wenn der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to 3+0} f(x)$ existieren und übereinstimmen

$$\lim_{x \to 3-0} f(x) = \lim_{x \to 3+0} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x).$$

Zur Bildung des **linksseitigen Grenzwertes** $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x)$ wird eine Folge $\{x_n\}$ benötigt, die gegen 3 konvergiert $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 3$. Alle Glieder dieser Folge $\{x_n\}$ müssen kleiner als 3 sein.

Diese Folge $\{x_n\}$ kann leicht als Summe einer konstanten Folge und einer Nullfolge konstruiert werden.
Die Folge $\{x_n\} = \left\{3 - \frac{1}{n}\right\}$ erfüllt genau die genannten Forderungen $\lim\limits_{n \to \infty} (3 - \frac{1}{n}) = 3$.
Die Folge der Funktionswerte entsteht durch Einsetzen der Folge $\{x_n\} = \left\{3 - \frac{1}{n}\right\}$ in die Funktion $f(x) = (x-1)^2$ aus dem zweiten Intervall $1 \le x < 3$, denn nur in diesem Intervall sind die Glieder der Folge $\{x_n\}$ zugelassen.
Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x)$ wird aktuell durch $\lim\limits_{x \to 3-0} (x-1)^2$ berechnet.
Die Folge der Funktionswerte heißt dann $\{f(x_n)\} = \left\{\left((3 - \frac{1}{n}) - 1\right)^2\right\}$.

Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \left((3 - \frac{1}{n}) - 1\right)^2$ ist nun ein Grenzwert einer Folge von Funktionswerten.
Zunächst wird der Ausdruck $\lim\limits_{n \to \infty} \left((3 - \frac{1}{n}) - 1\right)^2$ durch Auflösen der beiden Klammern vereinfacht, um dann die einzelnen Grenzwerte zu bestimmen.

$$\lim_{n \to \infty} \left((3 - \tfrac{1}{n}) - 1\right)^2 = \lim_{n \to \infty} \left(3 - \tfrac{1}{n} - 1\right)^2 = \lim_{n \to \infty} \left(2 - \tfrac{1}{n}\right)^2 = \lim_{n \to \infty} \left(4 - 2\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 4 - 0 + 0 = 4$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x)$ heißt 4.

Zur Bildung des **rechtsseitigen Grenzwertes** $\lim\limits_{x \to 3+0} f(x)$ wird eine Folge $\{x_n\}$ benötigt, die gegen 3 konvergiert $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 3$. Alle Glieder dieser Folge $\{x_n\}$ müssen größer als 3 sein.

Diese Folge $\{x_n\}$ kann leicht als Summe einer konstanten Folge und einer Nullfolge konstruiert werden.

Die Folge $\{x_n\} = \{3 + \frac{1}{n}\}$ erfüllt genau die genannten Forderungen $\lim\limits_{n\to\infty} (3 + \frac{1}{n}) = 3$.

Die Folge der Funktionswerte entsteht durch Einsetzen der Folge $\{x_n\} = \{3 + \frac{1}{n}\}$ in die Funktion $f(x) = (x-5)^2$ aus dem dritten Intervall $3 \le x < 5$, denn nur in diesem Intervall sind die Glieder der Folge $\{x_n\}$ zugelassen.

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)$ wird aktuell durch $\lim\limits_{x\to 3+0} (x-5)^2$ berechnet.

Die Folge der Funktionswerte heißt dann $\{f(x_n)\} = \left\{\left((3+\frac{1}{n})-5\right)^2\right\}$.

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left((3+\frac{1}{n})-5\right)^2$ ist nun ein Grenzwert einer Folge von Funktionswerten.

Zunächst wird der Ausdruck $\lim\limits_{n\to\infty} \left((3+\frac{1}{n})-5\right)^2$ durch Auflösen der beiden Klammern vereinfacht, um dann die einzelnen Grenzwerte zu bestimmen.

$$\lim_{n\to\infty} \left((3+\tfrac{1}{n})-5\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(3+\frac{1}{n}-5\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(-2-\frac{1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(4+2\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 4+0+0 = 4$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)$ heißt ebenfalls 4.

Aus der Gleichheit des linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwertes folgt der Grenzwert

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = 4.$$

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x < 1 \\ (x-1)^2 & \textit{für} \quad 1 \le x < 3 \\ (x-5)^2 & \textit{für} \quad 3 \le x < 5 \\ 0 & \textit{für} \quad 5 \le x \end{cases}$ ist an der Stelle $x = 3$ stetig, wenn

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$ gilt.

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$ stimmt mit dem Funktionswert $f(3) = 4$ überein.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 4$$

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x < 1 \\ (x-1)^2 & \textit{für} \quad 1 \le x < 3 \\ (x-5)^2 & \textit{für} \quad 3 \le x < 5 \\ 0 & \textit{für} \quad 5 \le x \end{cases}$ ist an der Stelle $x_0 = 3$ stetig.

Aufgabe 1.2
Untersuchen Sie die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = -1$ auf Stetigkeit

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \quad .$$

Lösung

Eine Funktion $y = f(x)$ ist an der Stelle $x = a$ stetig, wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

gilt.
Es ist eine Bedingung, dass der Punkt $a \in \mathrm{R}$ und jede Umgebung $U(a) \in \mathrm{R}$ zum Definitionsbereich D_f einer Funktion $y = f(x)$ gehören.

Eine Funktion $y = f(x)$ ist in einem Punkt $x = a$ stetig, wenn
1. die Funktion $y = f(x)$ in a definiert ist und $f(a)$ existiert,
2. der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ existieren und übereinstimmen $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ und
3. die Grenzwerte mit dem Funktionswert $f(a)$ übereinstimmen
$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$.

Zum Nachweis der Stetigkeit einer Funktion $y = f(x)$ in einem Punkt $x = a$ sind diese drei Nachweise zu führen.

Stimmt der Grenzwert mit dem Funktionswert an der Stelle -1 überein $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$?

Zunächst wird der Funktionswert $f(-1)$ bestimmt.

Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ ist als gebrochener Ausdruck definiert. Der Funktionswert an der Stelle $x_0 = -1$ kann nicht berechnet werden, da sich für den Zähler und den Nenner null ergeben. Es entsteht ein unbestimmter Ausdruck „$\dfrac{0}{0}$“.
Der Definitionsbereich $D_f = \{x \in R \wedge x \neq -1\}$, ist die Menge aller reellen Zahlen mit Ausnahme von -1.

Dann wird der Grenzwert $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ bestimmt.
Eine Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle $x = a$ den Grenzwert F , wenn für jede beliebige Zahlenfolge $\{x_n\}$ aus dem Definitionsbereich D der Funktion mit dem Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ die zugehörige Folge der Funktionswerte $\{f(x_n)\}$ den Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \mathrm{F}$ hat.

Der Grenzwert[1] $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ existiert nur dann, wenn der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x)$ existieren und übereinstimmen

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1} f(x).$$

Zur Bildung des **linksseitigen Grenzwertes** $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x)$ wird eine Folge $\{x_n\}$ benötigt, die gegen -1 konvergiert $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -1$. Alle Glieder dieser Folge $\{x_n\}$ müssen kleiner als -1 sein.

Diese Folge $\{x_n\}$ kann leicht als Summe einer konstanten Folge und einer Nullfolge konstruiert werden.
Die Folge $\{x_n\} = \left\{-1 - \frac{1}{n}\right\}$ erfüllt genau die genannten Forderungen $\lim\limits_{n \to \infty} (-1 - \frac{1}{n}) = -1$.
Die Folge der Funktionswerte entsteht durch Einsetzen der Folge $\{x_n\} = \left\{-1 - \frac{1}{n}\right\}$ in die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}.$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x)$ wird durch $\lim\limits_{x \to -1-0} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ berechnet.

Die Folge der Funktionswerte heißt dann $\{f(x_n)\} = \left\{\dfrac{(-1 - \frac{1}{n})^2 - 2(-1 - \frac{1}{n}) - 3}{(-1 - \frac{1}{n}) + 1}\right\}$.

Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(-1 - \frac{1}{n})^2 - 2(-1 - \frac{1}{n}) - 3}{(-1 - \frac{1}{n}) + 1}$ ist nun ein Grenzwert einer Folge von Funktionswerten.

Zunächst wird der Ausdruck $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(-1 - \frac{1}{n})^2 - 2(-1 - \frac{1}{n}) - 3}{(-1 - \frac{1}{n}) + 1}$ durch Auflösen der Klammern vereinfacht, um dann die einzelnen Grenzwerte zu bestimmen.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1 - \frac{1}{n})^2 - 2(-1 - \frac{1}{n}) - 3}{(-1 - \frac{1}{n}) + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + 2 + \frac{2}{n} - 3}{-1 - \frac{1}{n} + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \to \infty} -n \cdot \left(\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \to \infty} -4 - \frac{1}{n} = -4 - 0 = -4$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x)$ heißt -4.

Zur Bildung des **rechtsseitigen Grenzwertes** $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x)$ wird eine Folge $\{x_n\}$ benötigt, die gegen -1 konvergiert $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -1$. Alle Glieder dieser Folge $\{x_n\}$ müssen größer als -1 sein.

[1] Die Regel von l'Hospital soll mit diesem Beispiel nicht geübt werden.

Diese Folge $\{x_n\}$ kann leicht als Summe einer konstanten Folge und einer Nullfolge konstruiert werden.
Die Folge $\{x_n\} = \left\{-1 + \frac{1}{n}\right\}$ erfüllt genau die genannten Forderungen $\lim\limits_{n\to\infty} (-1 + \frac{1}{n}) = -1$.
Die Folge der Funktionswerte entsteht durch Einsetzen der Folge $\{x_n\} = \left\{-1 + \frac{1}{n}\right\}$ in die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1}$.

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)$ wird aktuell durch $\lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$ berechnet.

Die Folge der Funktionswerte heißt dann $\{f(x_n)\} = \left\{\dfrac{(-1+\frac{1}{n})^2 - 2(-1+\frac{1}{n}) - 3}{(-1+\frac{1}{n})+1}\right\}$.

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1+\frac{1}{n})^2 - 2(-1+\frac{1}{n}) - 3}{(-1+\frac{1}{n})+1}$ ist nun ein Grenzwert einer Folge von Funktionswerten.

Zunächst wird der Ausdruck $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1+\frac{1}{n})^2 - 2(-1+\frac{1}{n}) - 3}{(-1+\frac{1}{n})+1}$ durch Auflösen der Klammern vereinfacht, um dann die einzelnen Grenzwerte zu bestimmen.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1+\frac{1}{n})^2 - 2(-1+\frac{1}{n}) - 3}{(-1+\frac{1}{n})+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + 2 - \frac{2}{n} - 3}{-1 + \frac{1}{n} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(-\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} -4 + \frac{1}{n} = -4 + 0 = -4$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)$ heißt ebenfalls −4.

Aus der Gleichheit des linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwertes folgt der Grenzwert

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1} f(x) = -4.$$

Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$ ist an der Stelle $x = -1$ stetig, wenn

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$ gilt.

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -4$ kann nicht mit dem Funktionswert $f(-1)$ übereinstimmen, da der Funktionswert nicht existiert. Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$ hat an der Stelle $x_0 = -1$ eine Lücke.

Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1}$ ist an der Stelle $x_0 = -1$ unstetig.

Die Stelle $x = a$ ist eine hebbare Unstetigkeit, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert, aber die Funktion $y = f(x)$ in $x = a$ nicht definiert ist.

Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1}$ ist an der Stelle $x_0 = -1$ hebbar unstetig.

Was bedeutet hebbare Unstetigkeit?
Der „Mangel" der Unstetigkeit kann behoben werden.

Diese Funktion wird stetig, wenn der Funktionswert $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$ gleich dem Grenzwert gesetzt wird.

Das kann erreicht werden. Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1}$ besteht im Zähler aus zwei Binomen, die miteinander multipliziert werden

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = \frac{(x+1) \cdot (x-3)}{x+1}.$$

Durch Kürzen entsteht eine überall stetige Funktion $f(x) = x - 3$ mit denselben Eigenschaften, die auch $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1}$ besitzt.

Die Funktionen $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1}$ und $f(x) = x - 3$ unterscheiden sich genau in einem Punkt $\mathrm{P}(-1; -4)$.