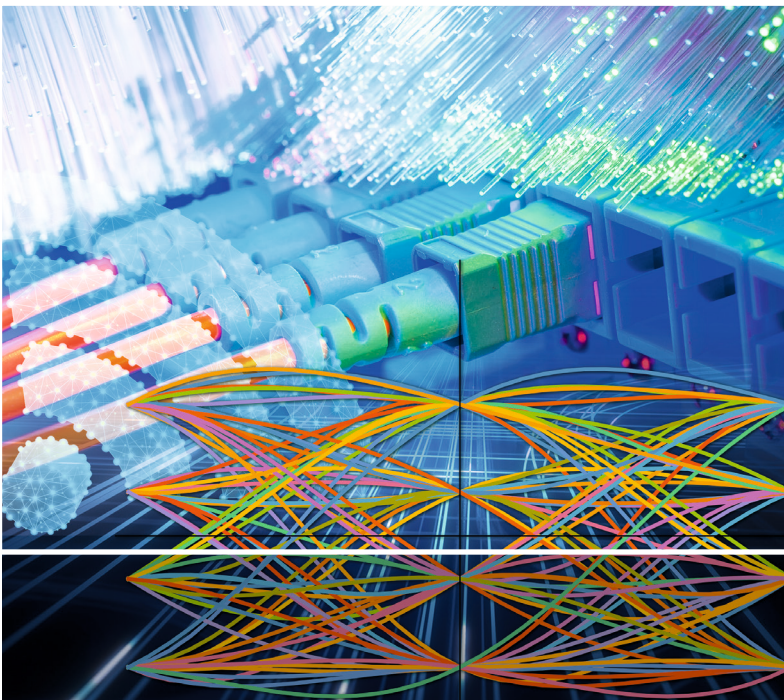


Carsten Roppel

# Grundlagen der Nachrichtentechnik

Übertragungstechnik und Signalverarbeitung



HANSER



**Bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

**[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)**



Carsten Roppel

# Grundlagen der Nachrichtentechnik

Übertragungstechnik und Signalverarbeitung

Mit 278 Bildern, 24 Tabellen und 48 Beispielen



**Fachbuchverlag Leipzig**  
im Carl Hanser Verlag

**Prof. Dr.-Ing. Carsten Roppel**  
Fachhochschule Schmalkalden  
Fachbereich Elektrotechnik



Alle in diesem Buch enthaltenen Programme, Verfahren und elektronischen Schaltungen wurden nach bestem Wissen erstellt und mit Sorgfalt getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund ist das im vorliegenden Buch enthaltene Programm-Material mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Art aus der Benutzung dieses Programm-Materials oder Teilen davon entsteht.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN: 978-3-446-45324-1

E-Book-ISBN: 978-3-446-45695-2

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2018 Carl Hanser Verlag München

Internet: <http://www.hanser-fachbuch.de>

Lektorat: Manuel Leppert, M.A.

Herstellung: Dipl.-Ing. (FH) Franziska Kaufmann

Coverconcept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Coverrealisierung: Stephan Rönigk

Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG BuchPartner, Göttingen

Printed in Germany

# Vorwort

Nachrichten werden in technischer Hinsicht durch Signale dargestellt. Die Erzeugung, die Übertragung und der Empfang dieser Signale ist daher eine wesentliche Grundlage der Nachrichtentechnik. Mit diesen Aspekten befasst sich das vorliegende Buch, wobei der Schwerpunkt gemäß ihrer technischen Bedeutung auf den digitalen Übertragungssystemen liegt. Dabei spielen oft spezielle Filterfunktionen eine wichtige Rolle. Fragt man sich dann, wie beispielsweise ein Kosinus-roll-off-Filter oder ein signalangepasstes Filter implementiert wird, so begibt man sich auf das Gebiet der digitalen Signalverarbeitung. Daher geht das Buch auch auf die für die Nachrichtentechnik wichtigen Aspekte der digitalen Signalverarbeitung ein. Für die Kommunikationssysteme wie Internet oder Mobilfunk, die wir heute intensiv nutzen, ist die Übertragungstechnik ein ganz wesentlicher Baustein. Aber es werden auch Vermittlungstechnik und Datenübertragungsprotokolle benötigt, deren Grundlagen ebenfalls in knapper Form behandelt werden.

Um den Stoff zu vertiefen, gibt es zu jedem Kapitel einige Übungsaufgaben. Beim selbstständigen Bearbeiten der Aufgaben ist es wichtig, die eigenen Ergebnisse kontrollieren zu können, daher stehen die Lösungen dazu im Anhang. Eine große Bedeutung hat heute die Simulation, mit deren Hilfe nicht nur kompliziertere Fragestellungen bearbeitet werden können. Die den Simulationen zugrunde liegenden zeitdiskreten Modelle bilden häufig eine hard- oder softwarebasierte Implementierung eins zu eins ab. Sie können daher auch der Überprüfung einer solchen Implementierung oder der automatischen Codegenerierung dienen. Daher werden auf der Internetseite zum Buch Übungen mit den Simulationstools MATLAB und Scilab beschrieben.

Der vorliegende Text basiert teilweise auf dem Buch *Grundlagen der digitalen Kommunikationstechnik* (Hanser-Verlag, 2006). Dessen Inhalt wurde jedoch so stark überarbeitet und völlig neu strukturiert, dass das vorliegende Buch den neuen Titel *Grundlagen der Nachrichtentechnik* bekommen hat.

Ich bedanke mich bei dem Team des Carl Hanser Verlages Franziska Jacob, Franziska Kaufmann und Manuel Leppert für zahlreiche Anregungen zum Konzept und zur Gestaltung des Buches sowie ihre Hilfe bei inhaltlichen und technischen Fragen. Und ich bedanke mich bei meiner Frau, die ganz wesentlich zur richtigen Rechtschreibung beigetragen hat.

Schmalkalden, im Mai 2018

Carsten Roppel

Internetseite mit Begleitmaterialien zum Buch:

<http://www.hs-schmalkalden.de/nachrichtentechnik>



# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einführung</b> .....	<b>11</b>
1.1	Nachrichtentechnik – ein Überblick .....	11
1.2	Digitale und analoge Übertragung .....	13
1.3	Standardisierung .....	16
1.4	Zum Inhalt dieses Buches .....	17
<b>2</b>	<b>Signalübertragung</b> .....	<b>19</b>
2.1	Lineare zeitinvariante Systeme .....	19
2.1.1	Impulsantwort und Faltung .....	20
2.1.2	Fourier-Transformation .....	25
2.1.3	Übertragungsfunktion .....	31
2.1.4	Verzerrungsfreies System .....	35
2.1.5	Der ideale Tiefpass .....	37
2.1.6	Der ideale Bandpass .....	38
2.2	Energie- und Leistungssignale .....	39
2.2.1	Normierte Energie und normierte Leistung .....	39
2.2.2	Korrelation von Energie- und Leistungssignalen .....	40
2.2.3	Energie- und Leistungsdichtespektrum .....	42
2.3	Zufallssignale .....	44
2.3.1	Beschreibung von Zufallssignalen durch Erwartungswerte .....	45
2.3.2	Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte .....	47
2.3.3	Leistungsdichtespektrum von Zufallssignalen .....	54
2.3.4	Übertragung von Zufallssignalen über LTI-Systeme .....	57
2.3.5	Weißes Rauschen, Rauschbandbreite und additives Rauschen .....	59
2.4	Weiterführende Hinweise .....	64
2.5	Übungsaufgaben .....	64
<b>3</b>	<b>Signalabtastung und Quantisierung</b> .....	<b>66</b>
3.1	Abtasttheorem .....	66
3.2	Abtastung von Bandpasssignalen .....	72
3.3	Lineare Quantisierung .....	75



---

3.4	Nichtlineare Quantisierung und Pulsmodemodulation (PCM) .....	78
3.5	Weiterführende Hinweise .....	82
3.6	Übungsaufgaben .....	82
<b>4</b>	<b>Digitale Signalverarbeitung in der Nachrichtentechnik.....</b>	<b>84</b>
4.1	Zeitdiskrete Signale und Systeme .....	84
4.1.1	Energie, Leistung und Korrelationsfunktion .....	85
4.1.2	Diskrete Faltung .....	87
4.1.3	Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale .....	90
4.1.4	Diskrete Fourier-Transformation .....	92
4.2	Digitale Filter .....	97
4.3	Weiterführende Hinweise .....	106
4.4	Übungsaufgaben .....	107
<b>5</b>	<b>Digitale Nachrichtenübertragung im Basisband .....</b>	<b>108</b>
5.1	Basisbandsignale und Leitungscodes.....	108
5.2	Intersymbol-Interferenz und Nyquist-Pulsformung .....	112
5.2.1	Nyquist-Bandbreite .....	112
5.2.2	Das erste Nyquist-Kriterium .....	113
5.2.3	Kosinus-roll-off-Filter .....	115
5.2.4	Das Augendiagramm .....	118
5.2.5	Leistungsdichtespektrum digitaler Basisbandsignale .....	120
5.3	Fehlerwahrscheinlichkeit .....	124
5.3.1	Fehlerwahrscheinlichkeit bei binärer Übertragung .....	124
5.3.2	Signalangepasstes Filter .....	128
5.3.3	Fehlerwahrscheinlichkeit bei Mehrpegelübertragung .....	133
5.4	Kanalverzerrungen .....	137
5.4.1	Symboltaktentzerrer.....	137
5.4.2	Entzerrer mit Doppelabtastung .....	140
5.4.3	Vergleich der verschiedenen Empfängerkonzepte .....	144
5.4.4	Adaptive Entzerrung .....	145
5.5	Scrambling .....	147
5.6	Synchronisation .....	151
5.6.1	Symboltaktsynchronisation .....	151
5.6.2	Rahmensynchronisation .....	154
5.7	Weiterführende Hinweise .....	156
5.8	Übungsaufgaben .....	157

<b>6</b>	<b>Modulationsverfahren .....</b>	<b>158</b>
6.1	Bandpasssignale .....	159
6.1.1	Bandpasssignal und äquivalentes Tiefpasssignal .....	159
6.1.2	Äquivalentes Tiefpasssystem .....	163
6.1.3	Leistungsdichtespektrum von Bandpassrauschen .....	167
6.2	Analoge Modulationsverfahren .....	168
6.2.1	Amplitudenmodulation .....	169
6.2.2	Frequenz- und Phasenmodulation .....	176
6.3	Digitale Modulationsverfahren .....	186
6.3.1	Quadraturmodulator .....	186
6.3.2	Amplitudenumtastung .....	188
6.3.3	Phasenumtastung .....	190
6.3.4	Quadratur-Amplitudenmodulation .....	195
6.3.5	Frequenzumtastung .....	197
6.4	Demodulation und Fehlerwahrscheinlichkeit digitaler Modulationsverfahren ..	206
6.4.1	Kohärente Demodulation .....	207
6.4.2	Inkohärente Demodulation .....	219
6.5	Entzerrung von Bandpasssignalen .....	225
6.6	Multiträgersysteme und Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)	226
6.7	Empfängerarchitekturen .....	234
6.8	Weiterführende Hinweise .....	237
6.9	Übungsaufgaben .....	238
<b>7</b>	<b>Kanalcodierung .....</b>	<b>240</b>
7.1	Kanalkapazität .....	241
7.2	Blockcodes .....	244
7.2.1	Eigenschaften von Blockcodes .....	244
7.2.2	Hamming-Codes .....	248
7.2.3	Codiergewinn .....	252
7.2.4	Zyklische Codes .....	253
7.3	Faltungscodes .....	259
7.3.1	Codierung .....	260
7.3.2	Viterbi-Decodierung .....	264
7.3.3	Decodierung mit/ohne Zuverlässigkeitsinformation .....	268
7.4	Interleaving .....	270
7.5	Turbo-Codes und LDPC-Codes .....	273
7.6	Weiterführende Hinweise .....	275
7.7	Übungsaufgaben .....	276

<b>8</b>	<b>Kommunikationsnetze</b> .....	<b>277</b>
8.1	Das OSI-Referenzmodell .....	277
8.2	Mehrfachzugriffsverfahren.....	280
8.2.1	Prinzipien des Mehrfachzugriffs.....	280
8.2.2	Dezentrale Zugriffssteuerung .....	284
8.3	Leitungs- und Paketvermittlung.....	288
8.4	Zuverlässige Datenübertragung .....	294
8.5	Weiterführende Hinweise .....	298
8.6	Übungsaufgaben .....	299
	<b>Anhang</b> .....	<b>301</b>
	Anhang 1: Kleine Formelsammlung.....	301
	Anhang 2: Tabellen und Theoreme der Fourier-Transformation .....	304
	Anhang 3: Die Hilbert-Transformation .....	307
	Anhang 4: Die erfc-Funktion .....	309
	Anhang 5: Lösungen zu den Übungsaufgaben .....	311
	<b>Verzeichnis der Beispiele</b> .....	<b>321</b>
	<b>Verzeichnis der Symbole und Formelzeichen</b> .....	<b>323</b>
	<b>Abkürzungsverzeichnis</b> .....	<b>325</b>
	<b>Literatur</b> .....	<b>327</b>
	<b>Index</b> .....	<b>331</b>

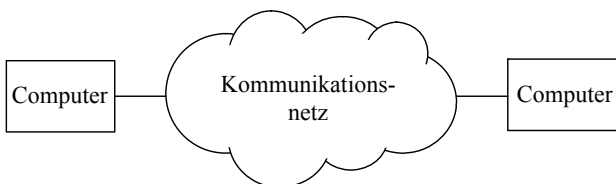
# 1

## Einführung

Dieses Kapitel gibt einen ersten Überblick über die Elemente digitaler und analoger Übertragungssysteme. Daneben gehen wir auch auf die wichtigsten Standardisierungsgremien ein, die dafür sorgen, dass Systeme verschiedener Hersteller miteinander kommunizieren können.

### ■ 1.1 Nachrichtentechnik – ein Überblick

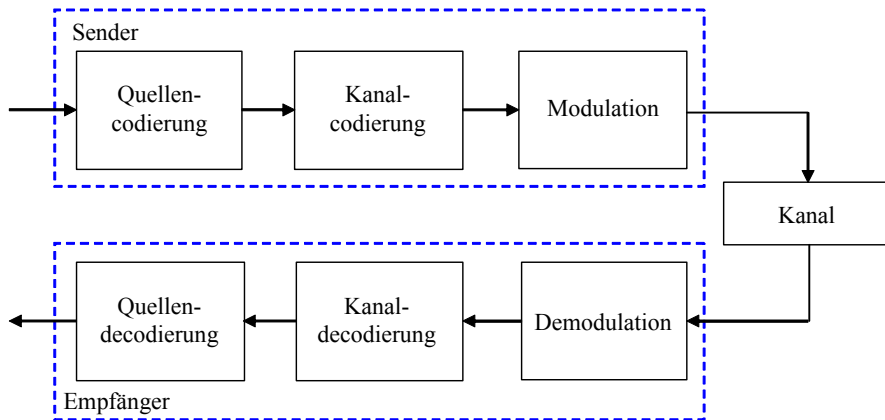
Zwei Computer sind über ein Kommunikationsnetz verbunden und tauschen Daten aus (Bild 1.1) – dieses Prinzip liegt vielen Anwendungen der Nachrichtentechnik zugrunde. Beispielsweise kann es sich bei einem Computer um den privaten PC zu Hause handeln, der mit einem Server eines Internetanbieters kommuniziert. Es kann sich aber auch um einen Computer in einer Fertigungslinie handeln, der Daten von Sensoren erfasst und an einen Zentralrechner übermittelt. Oder um Steuergeräte für Antrieb, Bremsen usw. in einem Fahrzeug. Entsprechend der Vielzahl dieser Anwendungen kommen viele verschiedene Übertragungssysteme zum Einsatz: Ethernet, WLAN (Wireless Local Area Network), Bluetooth, DSL (Digital Subscriber Line) oder Feldbusse für kürzere Entfernungen und die Übertragung über Lichtwellenleiter, Richtfunk oder Satellit bei großen Entfernungen.



**Bild 1.1** Ein Kommunikationssystem

Trotz dieser Vielzahl gibt es grundlegende Funktionen, die den Systemen gemeinsam sind. Bild 1.2 zeigt ein allgemeines Modell eines Übertragungssystems. Im Sender finden wir die Quellen- und Kanalcodierung sowie die Modulation. Der Empfänger besteht aus den entsprechenden Funktionen der Quellen- und Kanaldcodierung und der Demodulation. Sender und Empfänger sind über den Übertragungskanal – oder kurz Kanal – verbunden.

Betrachten wir das System von „innen“ heraus und beginnen mit dem Kanal: Der Kanal ist das physikalische Übertragungsmedium zwischen Sender und Empfänger. Dabei kann es sich z. B. um eine terrestrische oder satellitengebundene Funkstrecke, ein Telefonkabel, einen Lichtwellenleiter oder auch um ein Speichermedium wie die Compact Disc (CD) handeln. Der Kanal dämpft und verzerrt das vom Sender ausgehende Nutzsignal, und es überlagern sich Störungen in Form eines Rauschsignals. Das Verhältnis der Leistung des Nutzsignals zur Leistung

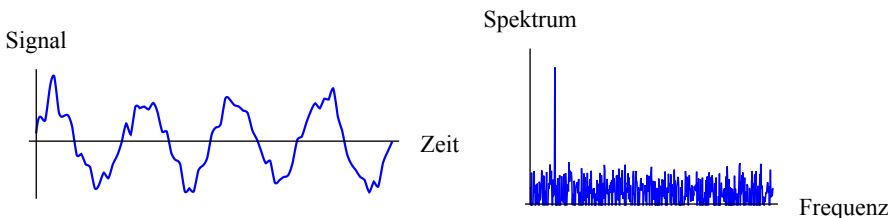


**Bild 1.2** Elemente eines Übertragungssystems

des Rauschsignals am Empfängereingang bezeichnet man als Signal-Rausch-Verhältnis. Eine weitere wesentliche Eigenschaft des Kanals ist dessen Bandbreite, d. h. die Größe des für die Übertragung nutzbaren Frequenzbereichs. Bei einem digitalen Übertragungssystem bestimmen das Signal-Rausch-Verhältnis und die Bandbreite die erzielbare Übertragungsrate. Diese wird meist in Bit pro Sekunde (bit/s) angegeben.

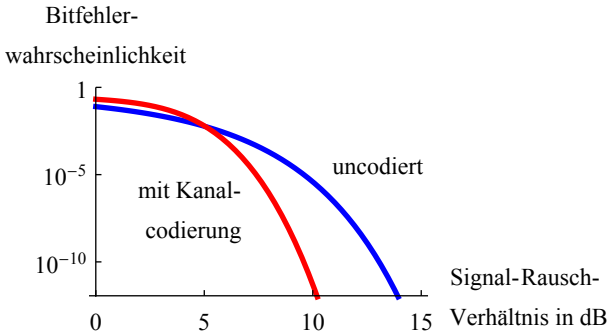
Der Block Modulation bildet die zu übertragende Nachricht auf für den Kanal geeignete Signale ab. Modulation und Demodulation können auch Funktionen zur spektralen Formung des gesendeten Signals bzw. zur Entzerrung des Signals im Empfänger, oder im Falle einer optischen Übertragung die elektrisch-optische Wandlung des Signals, beinhalten. Der Begriff Modem leitet sich aus der Zusammenfassung Modulation-Demodulation ab.

Wie die Begriffe Bandbreite, Frequenzbereich und spektrale Formung andeuten, spielen in der Nachrichtentechnik sowohl der Zeit- als auch der Frequenzbereich eine wichtige Rolle. Bild 1.3 zeigt links ein Signal im Zeitbereich. Es handelt sich um ein Sinussignal, dem Rauschen überlagert ist. Bild 1.3 rechts zeigt das Spektrum dieses Signals. Das Spektrum zeigt die Verteilung der Leistung oder der Amplitude über der Frequenz. Die Verbindung zwischen Zeit- und Frequenzbereich stellt die Fourier-Transformation her.



**Bild 1.3** Ein Signal im Zeit- und im Frequenzbereich

Bei einem digitalen Übertragungssystem ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit ein wichtiges Qualitätskriterium. Grundsätzlich kommt es durch das dem Nutzsignal überlagerte Rauschen bei der Übertragung zu Bitfehlern. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bit verfälscht wird, ist



**Bild 1.4** Bitfehlerwahrscheinlichkeit und Kanalcodierung

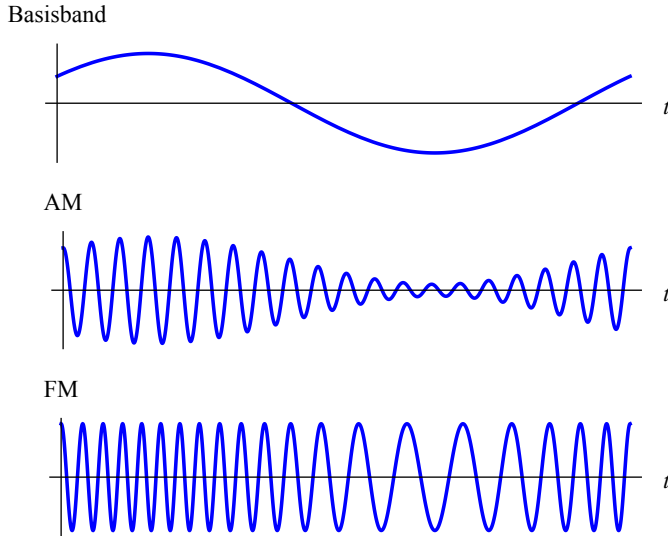
umso größer, je kleiner das Signal-Rausch-Verhältnis ist. Bild 1.4 zeigt einen typischen Verlauf der Bitfehlerwahrscheinlichkeit als Funktion des Signal-Rausch-Verhältnisses.

Mithilfe der Kanalcodierung lassen sich nun Bitfehler, die durch Störungen und auch durch Verzerrungen im Übertragungskanal verursacht werden, korrigieren. Dies geschieht, indem sendeseitig eine Zusatzinformation in Form von Redundanzbits zu der zu übertragenden Information hinzugefügt wird. Durch Auswertung der Redundanzinformation wird der Kanaldecodierer des Empfängers in die Lage versetzt, Bitfehler korrigieren zu können. Bild 1.4 zeigt die Verbesserung, die mit einer Kanalcodierung erzielt wird. Die Verbesserung drückt sich dadurch aus, dass bei gleicher Bitfehlerwahrscheinlichkeit mit Kanalcodierung ein geringeres Signal-Rausch-Verhältnis erforderlich ist als bei uncodierter Übertragung. Der steile Verlauf bei einem großen Signal-Rausch-Verhältnis ist typisch für digitale Übertragungssysteme. Er weist darauf hin, dass bei zunehmenden Störungen die Bitfehlerwahrscheinlichkeit stark ansteigt und die Übertragungsqualität schlagartig abnimmt. Wie man allerdings erkennt, schneiden sich die Kurven für codierte und uncodierte Übertragung. Links vom Schnittpunkt, also bei einem sehr kleinen Signal-Rausch-Verhältnis, ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei codierter Übertragung sogar größer als bei uncodierter Übertragung. Dies ist auf die zusätzlich zu übertragende Redundanzinformation zurückzuführen.

Am Eingang unseres Übertragungssystems in Bild 1.2 finden wir die Quellencodierung. Aufgabe der Quellencodierung ist es, die zu übertragende Nachricht mit einer möglichst geringen Anzahl von Bits darzustellen. Dazu wird die in der Nachricht enthaltene redundante Information minimiert. Die Trennung von Quellen- und Kanalcodierung geht auf die grundlegenden Arbeiten zur Informationstheorie von Claude Shannon aus dem Jahr 1948 zurück. Bekannte Quellencodierungsverfahren sind beispielsweise MPEG (Moving Picture Experts Group) für Videosignale und AAC (Advanced Audio Coding) für Audiosignale.

## ■ 1.2 Digitale und analoge Übertragung

Bei der großen Mehrzahl der heutigen Übertragungssysteme handelt es sich um digitale Systeme. Analoge Verfahren findet man im Bereich des Hörfunks, aber auch z. B. in der Sensorik. Eine Funktion, die sowohl in digitalen als auch in analogen Systemen zu finden ist, ist die Modulation eines Basisbandsignals auf einen sinusförmigen Träger. Ein Basisbandsignal ist das



**Bild 1.5** Analoge Modulationsverfahren

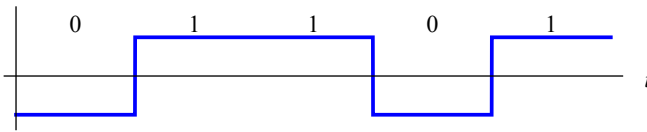
Quellensignal in seiner ursprünglichen Lage bei niedrigen Frequenzen. Durch die Modulation wird es zu höheren Frequenzen hin verschoben. Die wichtigsten analogen Modulationsverfahren sind die Amplitudenmodulation (AM) und die Frequenzmodulation (FM). Bei der AM ändert sich die Amplitude des Trägersignals in Abhängigkeit vom Basisbandsignal, und bei der FM ändert sich dessen Frequenz (Bild 1.5).

Bei den digitalen Modulationsverfahren repräsentiert das Basisbandsignal die zu übertragende Binärfolge (Bild 1.6). Bei der Amplitudenumtastung (Amplitude-Shift Keying, ASK) ändert sich die Amplitude in Abhängigkeit vom Basisbandsignal. Bei der Phasenumtastung (Phase-Shift Keying, PSK) ändert sich entsprechend die Phase und bei der Frequenzumtastung (Frequency-Shift Keying, FSK) die Frequenz.

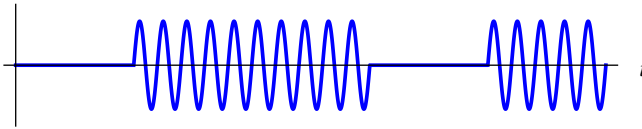
Digitale Übertragungssysteme enthalten viele analoge Komponenten, und auch umgekehrt findet sich bei analogen Systemen die digitale Signalverarbeitung. Der Übergang von analogen zu digitalen – oder genauer zeitdiskreten Signalen – erfolgt mithilfe eines Analog-Digital (A/D)- bzw. Digital-Analog (D/A)-Wandlers. Bild 1.7 zeigt eine typische Aufteilung von digitaler und analoger Signalverarbeitung in einem Übertragungssystem. Ein analoges Quellensignal wird mit einem A/D-Wandler digitalisiert. Anschließend wird das modulierte Signal mithilfe der digitalen Signalverarbeitung erzeugt und in ein analoges Signal gewandelt. Auf den D/A-Wandler folgen weitere analoge Komponenten, typischerweise ein Mischer, mit dem das Signal auf die gewünschte Frequenz umgesetzt wird, und ein Leistungsverstärker. Der Empfänger besteht aus einer entsprechenden Signalverarbeitungskette.

Die grundlegenden Funktionen der A/D-Wandlung sind die Abtastung und die Quantisierung des analogen Signals (Bild 1.8). Durch die Abtastung des analogen Signals  $x(t)$  mit der Abtastrate  $f_A$  erhalten wir das zeitdiskrete Signal  $x(n)$ . Die Punkte in der Darstellung von  $x(n)$  markieren die äquidistanten Abtastwerte im Abstand  $T_A = 1/f_A$ . Unter Quantisierung versteht man die Abbildung der Amplitude der Abtastwerte auf eine endliche Anzahl von diskreten Werten.

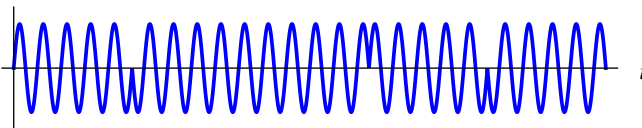
Basisband



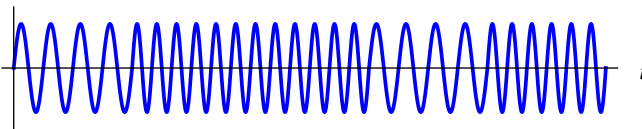
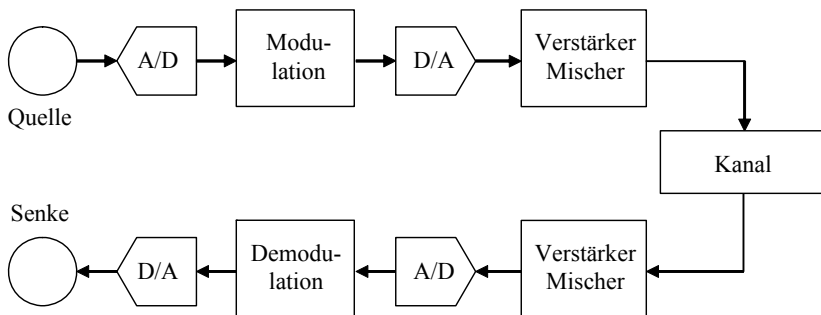
ASK



PSK

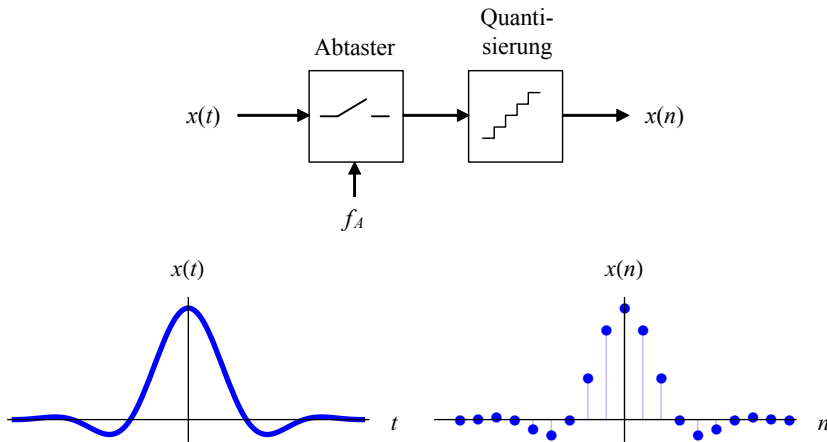


FSK

**Bild 1.6** Digitale Modulationsverfahren**Bild 1.7** Digitale und analoge Signalverarbeitung

In der Nachrichtentechnik haben wir es in der Regel mit einer Echtzeitverarbeitung der Daten zu tun, bei der die Signalverarbeitung in einer fest begrenzten Zeit ausgeführt werden muss. Während man im Audiobereich mit Abtastraten von einigen 10 kHz arbeitet, findet man in digitalen Übertragungssystemen Abtastraten bis zu 100 MHz und darüber hinaus. Beispielsweise muss bei der Filterung eines Audiosignals, das mit 44,1 kHz abgetastet wurde (diese Abtastrate





**Bild 1.8** Ein zeitdiskretes Signal entsteht durch Abtastung eines analogen Signals

wird bei der Audio-CD verwendet), die digitale Filterfunktion alle  $1/44,1 \text{ kHz} = 22,67 \mu\text{s}$  einen neuen Ausgangswert berechnen. Bei einer Abtastung mit 100 MHz stehen dagegen nur 10 ns für die Verarbeitung eines Abtastwertes zur Verfügung.

## 1.3 Standardisierung

Standards sind in der Nachrichtentechnik von großer Bedeutung, da nur durch sie gewährleistet wird, dass Systeme verschiedener Hersteller miteinander kommunizieren können. Standardisierungsgremien erarbeiten offene Standards, die allen Herstellern zur Verfügung stehen, um konforme Produkte zu entwickeln. Die Standardisierung ist einerseits oft Voraussetzung, aber andererseits keine Garantie für erfolgreiche Entwicklungen.

Das weltweit wichtigste Standardisierungsgremium ist die *International Telecommunication Union* (ITU, [www.itu.int](http://www.itu.int)). Die ITU ist eine Untergruppe der Vereinten Nationen und gliedert sich in drei Sektoren:

- ITU-T (Telecommunication Standardization Sector)
- ITU-R (Radiocommunication Sector)
- ITU-D (Telecommunication Development Sector)

Die ITU-T ist aus der CCITT (Comité Consultatif International de Télégraphique et Téléphonique) und die ITU-R aus der CCIR (Comité Consultatif International des Radiocommunication) hervorgegangen. Die ITU-R reguliert die weltweite Nutzung von Radiofrequenzen, und die ITU-D ist für Entwicklungsländer zuständig. Die für Telekommunikationsstandards zuständige ITU-T erarbeitet international gültige Empfehlungen (Recommendations). Diese sind in durch Buchstaben gekennzeichnete Serien geordnet. Beispielsweise befasst sich die G-Serie mit Übertragungssystemen (Transmission systems and media, digital systems and networks).

Die *International Organization for Standardization* (ISO, [www.iso.org](http://www.iso.org)) ist die Dachorganisation der nationalen Normenausschüsse. Dies sind beispielsweise in Deutschland das DIN

(Deutsches Institut für Normung) und in den USA das ANSI (American National Standards Institute). Die ISO stimmt die von den einzelnen Ländern vorgeschlagenen Standards ab und ist z. B. für die ISO-9000-Serie im Bereich des Qualitätsmanagements bekannt. Im Bereich der Telekommunikation ist insbesondere die OSI-Architektur der ISO von Bedeutung.

Das *European Telecommunications Standards Institute* (ETSI, [www.etsi.org](http://www.etsi.org)) wurde von der Europäischen Gemeinschaft gegründet und hat für die Normung im Bereich der Telekommunikation in Europa große Bedeutung. Ein überaus erfolgreicher ETSI-Standard im Mobilfunk ist GSM (Global System for Mobile Communications).

Das *Institute of Electrical and Electronic Engineers* (IEEE, [www.ieee.org](http://www.ieee.org)) erarbeitet Normen auf dem Gebiet der Elektrotechnik und Informatik und ist insbesondere für die Standards der IEEE-802-Reihe für lokale Rechnernetze bekannt.

Für den Bereich des Internets ist die *Internet Engineering Taskforce* (IETF, [www.ietf.org](http://www.ietf.org)) das wichtigste Gremium, obwohl auch die ITU in den letzten Jahren hier verstärkt (in der Y-Serie) tätig wurde. Die IETF wurde 1989 als Untergruppe des IAB (Internet Architecture Board) gegründet und erarbeitet Standards für das Internet. Diese heißen RFCs (Request for Comments) und sind frei verfügbar.

## ■ 1.4 Zum Inhalt dieses Buches

Kapitel 2 beschreibt Signale und deren Übertragung über lineare, zeitinvariante Systeme. Die hier behandelten Themen wie Impulsantwort und Faltung, Fourier-Transformation, Übertragungsfunktion und die Beschreibung von Zufallssignalen sind wichtige Grundlagen für die folgenden Kapitel.

Kapitel 3 und 4 befassen sich mit der Signalabtastung und Quantisierung als Grundlage der Analog-Digital-Wandlung sowie der digitalen Signalverarbeitung. Das Abtasttheorem ist für die Arbeit mit zeitdiskreten Signalen von fundamentaler Bedeutung. Wir gehen auch auf die für die Nachrichtentechnik wichtige Abtastung von Bandpasssignalen ein, bei der durch eine Unterabtastung die Abtastrate reduziert werden kann. Viele Verfahren der Nachrichtentechnik gehen von zeitdiskreten Signalen aus. Bei der digitalen Signalverarbeitung konzentrieren wir uns auf die aus Sicht der Nachrichtentechnik wichtigen Themen.

Kapitel 5 behandelt die digitale Nachrichtenübertragung im Basisband, und Kapitel 6 beschäftigt sich mit Modulationsverfahren. Auch bei der Verwendung eines Modulationsverfahrens erfolgt die Signalverarbeitung weitgehend im Basisband, sodass die Konzepte von Kapitel 5 von grundlegender Bedeutung sind. Wir behandeln analoge und digitale Modulationsverfahren und zuvor als gemeinsame Grundlage die Darstellung von Bandpasssignalen durch ihr äquivalentes Tiefpasssignal.

Gegenstand von Kapitel 7 sind Kanalcodierungsverfahren und deren Decodierung, und in Kapitel 8 gehen wir auf einige Aspekte von Kommunikationsnetzen ein, die über die Nachrichtenübertragung zwischen zwei Punkten hinausgehen.

Bei vielen Themen musste eine Auswahl getroffen werden. Am Ende jedes Kapitels finden sich daher weiterführende Hinweise mit Anmerkungen zu den Aspekten, die nicht behandelt wurden, und entsprechende Literaturhinweise. Im Anhang stehen nützliche Formeln und Tabellen.

Für die Vertiefung des Stoffes finden sich am Ende jedes Kapitels Übungsaufgaben, die Lösungen dazu stehen im Anhang. Neben Aufgaben, die mit Papier und Bleistift bearbeitet werden können, ist die Simulation von Übertragungssystemen sehr hilfreich, um Zusammenhänge verständlich zu machen oder um komplexere Systeme zu entwerfen. Als Simulationswerkzeuge bieten sich MATLAB und (als kostenfreie Alternative) Scilab an.

Auf der Internetseite

*<http://www.hs-schmalkalden.de/nachrichtentechnik>*

zum Buch stehen daher MATLAB- und Scilab-Dateien zur Verfügung, um ein einfaches Übertragungssystem zu simulieren und die als Ausgangspunkt für eigene Simulationen dienen können. Ebenso sind dort die Bilder aus dem Buch sowie interaktive Mathematica-Notebooks, u. a. zu den Themen Faltung, Abtasttheorem und diskrete Fourier-Transformation, verfügbar.

# 2

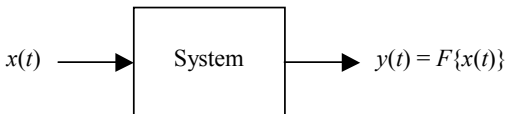
## Signalübertragung

Ein Signal ist die physikalische Darstellung einer Nachricht z. B. in Form einer elektrischen Spannung oder einer akustischen oder elektromagnetischen Welle. In diesem Kapitel gehen wir der Frage nach, wie sich ein Signal bei der Übertragung über ein System wie den Übertragungskanal oder ein Filter verhält. Sehr viele dieser Systeme gehören zur Klasse der linearen zeitinvarianten Systeme. Diese Systeme werden im Zeitbereich mithilfe der Impulsantwort und im Frequenzbereich mithilfe der Übertragungsfunktion beschrieben. Wichtige Werkzeuge in diesem Zusammenhang sind die Faltung und die Fourier-Transformation.

Nachrichtentragende Signale sind Zufallssignale, im Gegensatz zu deterministischen Signalen wie beispielsweise einem Sinussignal. Ein deterministisches Signal ist vollständig bekannt, eine Übertragung ist daher gar nicht notwendig! Die Beschreibung von Zufallssignalen mithilfe der Korrelation und des Leistungsdichtespektrums bildet eine weitere Grundlage für die Analyse von Übertragungssystemen.

### ■ 2.1 Lineare zeitinvariante Systeme

Wir betrachten ein System mit einem Eingang und einem Ausgang. Das System reagiert auf ein Eingangssignal  $x(t)$  mit dem Ausgangssignal  $y(t)$ . Der funktionale Zusammenhang zwischen Eingang und Ausgang wird durch  $y(t) = F\{x(t)\}$  beschrieben (Bild 2.1).



**Bild 2.1** Ein System

Ein System ist linear, wenn für eine Linearkombination von Eingangssignalen  $x_i(t)$  die Linearkombination der entsprechenden Ausgangssignale  $y_i(t) = F\{x_i(t)\}$  zu beobachten ist:

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots = \sum_i a_i x_i(t) \quad (2.1)$$
$$y(t) = a_1 F\{x_1(t)\} + a_2 F\{x_2(t)\} + \dots = \sum_i a_i F\{x_i(t)\}$$

So ist ein System mit  $F\{x(t)\} = 2x(t)$  linear, während ein System mit  $F\{x(t)\} = x^2(t)$  nichtlinear ist und Gl. (2.1) nicht gilt. Ein System ist zeitinvariant, wenn dessen Eigenschaften unabhängig von der Zeit sind. Für ein zeitverschobenes Eingangssignal  $x(t - t_0)$  ist dann das entsprechende zeitverschobene Ausgangssignal zu beobachten:

$$F\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0) \quad (2.2)$$

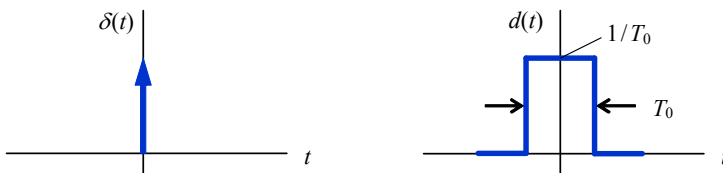
In diesem Fall spricht man von linearen zeitinvarianten Systemen oder kurz LTI-Systemen (Linear Time-Invariant, LTI). Beispiele für LTI-Systeme sind analoge und digitale Filter, ein Integrator oder ein Verzögerungsglied. Viele reale Systeme verhalten sich bei Ansteuerung mit Signalen kleiner Amplitude linear, während bei Signalen großer Amplitude nichtlineare Effekte auftreten. Ein Beispiel für ein *zeitvariantes* System ist ein Funkkanal zu einem beweglichen Empfänger, etwa einem Fußgänger, Rad- oder Autofahrer. Aufgrund der Bewegung des Empfängers ändern sich die Eigenschaften des Kanals mit der Zeit, und Gl. (2.2) gilt nicht.

### 2.1.1 Impulsantwort und Faltung

Zur Beschreibung eines LTI-Systems im Zeitbereich dient die Impulsantwort  $h(t)$ . Die Impulsantwort ist die Reaktion des Systems auf einen Dirac-Impuls  $\delta(t)$  am Eingang, d. h.  $h(t) = F\{\delta(t)\}$ . Der Dirac<sup>1</sup>-Impuls ist eine verallgemeinerte Funktion, die durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t) = 0 \quad \text{für } t \neq 0 \quad (2.3)$$

definiert ist. Umgangssprachlich kann man den Dirac-Impuls als einen unendlich schmalen Impuls mit der Fläche 1 beschreiben, dessen Wert zum Zeitpunkt  $t = 0$  undefiniert ist.  $\delta(t)$  hat die Einheit 1/s. Der Impuls wird grafisch durch einen senkrechten Pfeil dargestellt. Messtechnisch kann der Dirac-Impuls durch einen schmalen Rechteckimpuls  $d(t)$  der Breite  $T_0$ , der Höhe  $1/T_0$  und der Fläche 1 näherungsweise realisiert werden (Bild 2.2).



**Bild 2.2** Dirac-Impuls und messtechnische Realisierung durch schmalen Rechteckimpuls

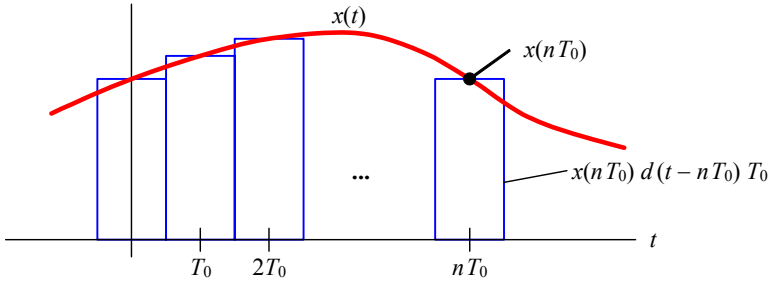
Ein beliebiges Signal  $x(t)$  kann durch eine Folge von Rechteckimpulsen approximiert werden, siehe Bild 2.3.  $x(nT_0) d(t - nT_0) T_0$  ist ein Rechteckimpuls an der Stelle  $t = nT_0$  und der Höhe  $x(nT_0)$ . Durch Aufsummieren der Rechteckimpulse erhält man:

$$x(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_0) d(t - nT_0) T_0 \quad (2.4)$$

Die Approximation wird offensichtlich umso besser, je schmaler die Rechteckimpulse sind. Lässt man  $T_0$  gegen null gehen, so geht der Rechteckimpuls in einen Dirac-Impuls und die Summe in Gl. (2.4) in ein Integral über. Mit den Bezeichnungen  $T_0 \rightarrow d\tau$  sowie  $nT_0 \rightarrow \tau$  erhält man den Ausdruck:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) * \delta(\tau) \quad (2.5)$$

<sup>1</sup> Paul A. M. Dirac (1902–1984), britischer Physiker.



**Bild 2.3** Approximation eines Signals  $x(t)$  durch eine Folge von Rechteckimpulsen

Das Integral in Gl. (2.5) bezeichnet man als Faltungsintegral; der Operator "\*" (lies: gefaltet mit) ist eine abkürzende Schreibweise dafür. Wenden wir diese Beziehung auf ein LTI-System an, so erhalten wir mit den Eigenschaften der Linearität, Gl. (2.1), und der Zeitinvarianz, Gl. (2.2):

$$\begin{aligned}
 y(t) = F\{x(t)\} &= F\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) F\{\delta(t - \tau)\} d\tau && \text{(Linearität)} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau && \text{(Zeitinvarianz)}
 \end{aligned}$$

Damit haben wir das folgende wichtige Ergebnis erhalten: Für ein beliebiges Eingangssignal  $x(t)$  erhält man das Ausgangssignal  $y(t)$  eines LTI-Systems durch Faltung von  $x(t)$  mit der Impulsantwort  $h(t)$ :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \tag{2.6}$$

Der Name Faltung (engl.: convolution) kommt daher, dass man  $h(-\tau)$  aus  $h(\tau)$  erhält, indem man  $h(\tau)$  an der y-Achse faltet oder spiegelt (siehe auch Beispiel 2.2). Wie bei der Multiplikation gelten für die Faltung das Kommutativ-, Assoziativ- und das Distributivgesetz (für einen Beweis siehe z. B. [22]):

$$\begin{aligned}
 x(t) * y(t) &= y(t) * x(t) \\
 [x(t) * y(t)] * z(t) &= x(t) * [y(t) * z(t)] \\
 x(t) * [y(t) + z(t)] &= [x(t) * y(t)] + [x(t) * z(t)]
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Aus der Definition Gl. (2.3) des Dirac-Impulses ergeben sich zwei häufig verwendete Beziehungen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0) dt = x(t_0) \quad (2.8)$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \quad (2.9)$$

Gl. (2.8) beschreibt die Siebeigenschaft des Dirac-Impulses, d. h., der Wert von  $x(t)$  an der Stelle  $t = t_0$  wird herausgesiebt.  $\delta(t-t_0)$  ist außer bei  $t = t_0$  gleich null, daher ist  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0) dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = x(t_0)$ , denn die Fläche des Dirac-Impulses ist 1. Gemäß Gl. (2.9) ergibt die Faltung eines Signals mit dem an die Stelle  $t_0$  verschobenen Dirac-Impuls das um  $t_0$  verschobene Signal  $x(t-t_0)$ . Ein System mit der Impulsantwort  $h(t) = \delta(t-t_0)$  wirkt also als Verzögerungsglied. Die Faltung in Gl. (2.9) wird berechnet, indem man das Faltungsintegral  $x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau-t_0) d\tau$  aufstellt. Hier ist  $\delta(t-\tau-t_0)$  außer bei  $\tau = t-t_0$  gleich null und man erhält – ähnlich der Überlegung zu Gl. (2.8) – die Lösung  $x(t-t_0)$ .

Die *Sprungantwort*  $g(t)$  eines Systems ist dessen Reaktion auf einen Einheitssprung  $u(t)$  am Eingang. Der Einheitssprung ist ein Signal, das zum Zeitpunkt  $t = 0$  von 0 auf 1 springt (für eine grafische Darstellung von  $u(t)$  siehe Bild 2.5 und Anhang 1). Die Impulsantwort ist die Ableitung der Sprungantwort:

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad (2.10)$$

Dies folgt aus

$$g(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau) d\tau$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left( \frac{d}{dt} u(t-\tau) \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau) d\tau = h(t) * \delta(t) = h(t)$$

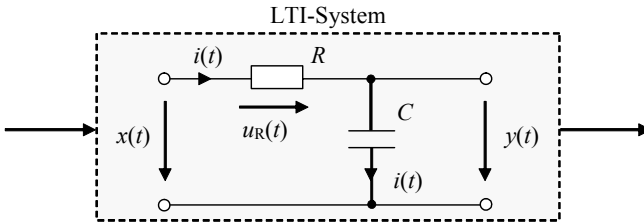
unter Anwendung des Kommutativgesetzes aus Gl. (2.7) sowie der Beziehung  $du(t)/dt = \delta(t)$ .

Da ein Einheitssprung messtechnisch einfacher erzeugt werden kann als ein Dirac-Impuls, wird die Impulsantwort oft über den Umweg der Sprungantwort bestimmt. Die folgenden beiden Beispiele sollen die Konzepte der Impulsantwort und der Faltung anhand eines einfachen, aber wichtigen Systems, des RC-Tiefpasses, verdeutlichen.

### Beispiel 2.1 Sprung- und Impulsantwort des RC-Tiefpasses

Bild 2.4 zeigt einen RC-Tiefpass mit dem Eingangssignal  $x(t)$  und dem Ausgangssignal  $y(t)$ .  $y(t)$  ist auch die Spannung an der Kapazität  $C$ . Der Strom durch  $C$  ist gegeben durch  $i(t) = C dy(t)/dt$ . Für das Ausgangssignal erhält man eine Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$y(t) = x(t) - u_R(t) = x(t) - R i(t) = x(t) - RC \frac{dy(t)}{dt}$$



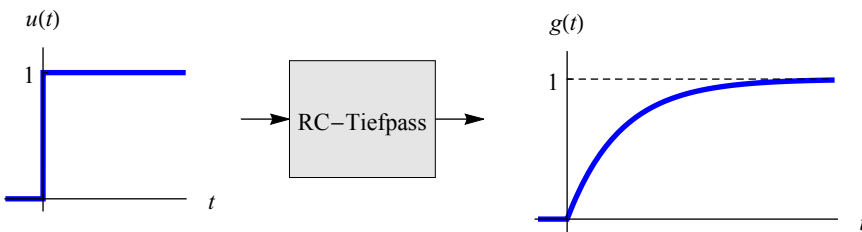
**Bild 2.4** Der RC-Tiefpass

Für  $x(t) = u(t) = 1$  und  $t \geq 0$  erhält man als Lösung die Sprungantwort (Bild 2.5)

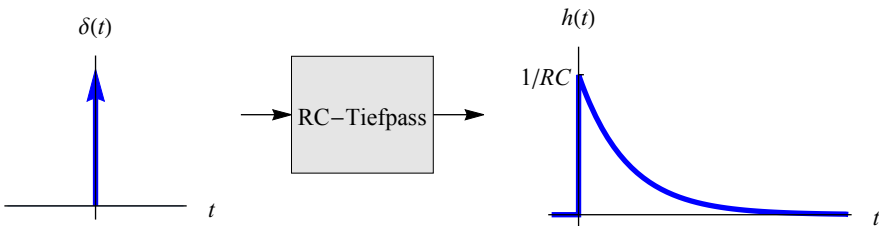
$$y(t) = g(t) = 1 - e^{-t/RC} \quad \text{für } t \geq 0 \tag{2.11}$$

wovon man sich durch Einsetzen in die Differenzialgleichung leicht überzeugen kann. Die Impulsantwort (Bild 2.6) erhalten wir schließlich durch Ableiten der Sprungantwort:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \quad \text{für } t \geq 0 \tag{2.12}$$



**Bild 2.5** Sprungantwort  $g(t)$  des RC-Tiefpasses als Reaktion auf den Einheitssprung  $u(t)$



**Bild 2.6** Impulsantwort  $h(t)$  des RC-Tiefpasses als Reaktion auf den Einheitssprung  $\delta(t)$

Wenn die Impulsantwort eines Systems bekannt ist, können wir mithilfe von Gl. (2.6) die Reaktion des Systems auf beliebige deterministische Eingangssignale bestimmen. Als Beispiel dazu wollen wir die Reaktion des RC-Tiefpasses auf einen Rechteckimpuls am Eingang berechnen. Der Rechteckimpuls ist ein Signal, das uns noch oft begegnen wird und daher ein eigenes Symbol verdient. Wir verwenden  $\text{rect}(t)$ , die Definition lautet:

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.13}$$



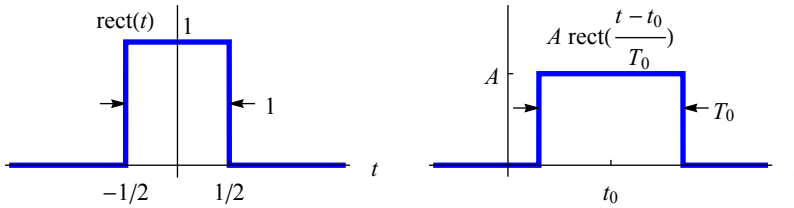


Bild 2.7 Der Rechteckimpuls

(Bild 2.7 links). Die Flanken des Impulses liegen bei  $t = \pm 1/2$ . Entsprechend beschreibt  $A \text{ rect}((t - t_0)/T_0)$  einen um  $t_0$  nach rechts verschobenen Rechteckimpuls der Amplitude  $A$  und der Breite  $T_0$  (Bild 2.7 rechts). Um die Position der Flanken dieses Impulses zu bestimmen, setzen wir  $(t - t_0)/T_0 = \pm 1/2$ . Daraus folgt, dass die Flanken bei  $t = t_0 \pm T_0/2$  liegen.

### Beispiel 2.2 Reaktion des RC-Tiefpasses auf einen Rechteckimpuls

Am Eingang des Tiefpasses aus Bild 2.4 liege nun das Signal  $x(t) = \text{rect}(t/T_0 - 1/2)$ . Dies ist ein Rechteckimpuls der Amplitude 1 und der Breite  $T_0$ , der bei  $t = 0$  beginnt. Für das Ausgangssignal gilt Gl. (2.6). Dabei ist  $\tau$  die Integrationsvariable, während  $t$  bezüglich der Integration ein konstanter Parameter ist.  $h(-\tau)$  erhält man durch Faltung von  $h(\tau)$  um die y-Achse, und  $h(t - \tau)$  ist zusätzlich um  $t$  verschoben.  $t > 0$  bewirkt eine Verschiebung nach rechts,  $t < 0$  nach links. Das Ausgangssignal zum Zeitpunkt  $t$ ,  $y(t)$ , ist gleich der Fläche unter  $x(\tau) \cdot h(t - \tau)$ , siehe Bild 2.8. Zur Berechnung von  $y(t)$  müssen drei Fälle unterschieden werden:

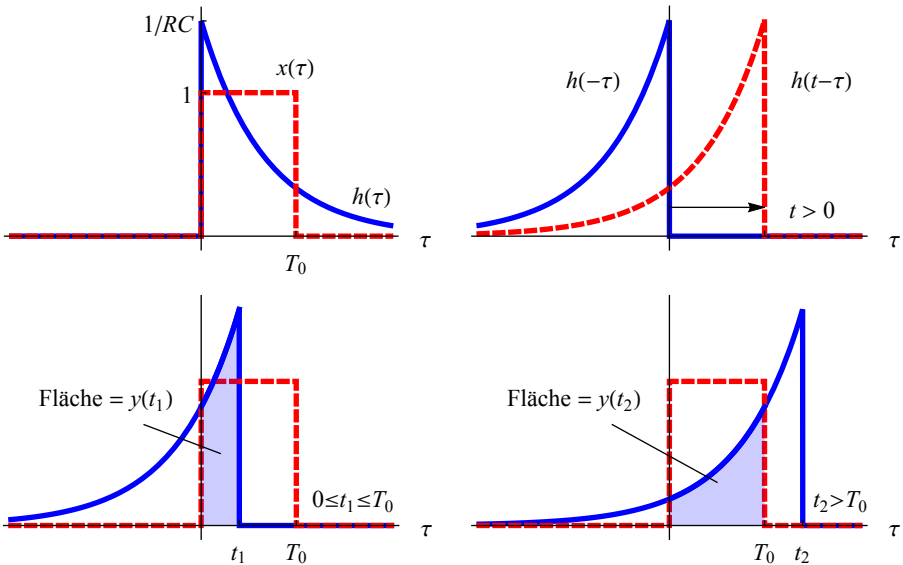
- 1. Fall:**  $t < 0$ . Für Verschiebungen  $t < 0$  überlappen sich  $x(\tau)$  und  $h(t - \tau)$  nicht, d. h., das Produkt  $x(\tau)h(t - \tau)$  ist null für alle  $\tau$ , und es ist  $y(t) = 0$ .
- 2. Fall:**  $0 \leq t \leq T_0$ . Für Verschiebungen im Bereich  $0 \leq t \leq T_0$  überlappen sich  $x(\tau)$  und  $h(t - \tau)$  im Intervall  $0 \leq \tau \leq t$ . In diesem Intervall ist  $x(\tau) = 1$ , und für  $y(t)$  folgt:

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau = \frac{1}{RC} [RC e^{-(t-\tau)/RC}]_0^t = 1 - e^{-t/RC}$$

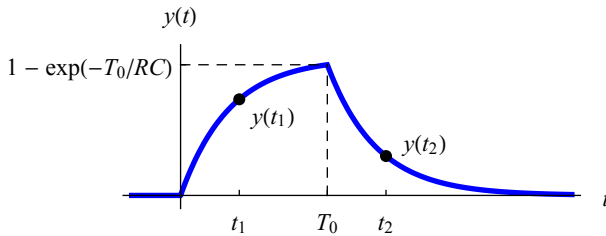
- 3. Fall:**  $t > T_0$ . Für Verschiebungen  $t > T_0$  überlappen sich  $x(\tau)$  und  $h(t - \tau)$  im Intervall  $0 \leq \tau \leq T_0$ , und wir erhalten entsprechend:

$$y(t) = \int_0^{T_0} \frac{1}{RC} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau = (1 - e^{-T_0/RC}) e^{-(t-T_0)/RC}$$

Der gesamte Verlauf von  $y(t)$  ist in Bild 2.9 wiedergegeben.



**Bild 2.8** Faltung eines Rechteckimpulses der Breite  $T_0$  mit der Impulsantwort des RC-Tiefpasses



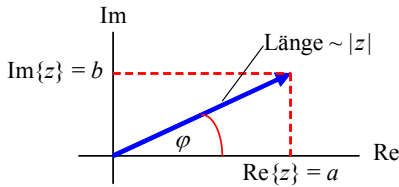
**Bild 2.9** Ausgangssignal  $y(t)$  des RC-Tiefpasses

### 2.1.2 Fourier-Transformation

Die Fourier<sup>2</sup>-Transformation dient der Beschreibung von Signalen und Systemen im Frequenzbereich. Die Beschreibungen im Zeit- und Frequenzbereich sind dabei gleichwertig; die Fourier-Transformation bietet aber eine neue Perspektive und damit neue Einsichten. Auch ist je nach Fragestellung die Lösung eines Problems in einem der Bereiche häufig wesentlich einfacher. Die Fourier-Transformierte eines Signals  $x(t)$  nennt man dessen Fourier-Spektrum  $S(f)$ , definiert als:

$$S(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \tag{2.14}$$

<sup>2</sup> Jean B. J. Fourier (1768–1830), französischer Mathematiker und Physiker.



**Bild 2.10** Betrag und Phase einer komplexen Größe

Umgekehrt erhält man  $x(t)$  durch Fourier-Rücktransformation von  $S(f)$ :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.15)$$

$S(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$  und  $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\}$  sind symbolische Schreibweisen, oft werden dafür auch die Symbole  $S(f) \bullet \rightarrow x(t)$  und  $x(t) \circ \rightarrow S(f)$  verwendet.  $S(f)$  gibt die Verteilung der Amplitude über der Frequenz an und wird daher auch als Fourier-Spektrum oder Amplitudendichtespektrum bezeichnet. Hat das Signal beispielsweise die Dimension einer Spannung, so hat die Fourier-Transformierte die Dimension Vs oder V/Hz. Oft wird auch  $\omega = 2\pi f$  anstelle von  $f$  als Integrationsvariable verwendet. Mit  $d\omega/df = 2\pi$  erhält man dann:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Die Fourier-Transformierte ist im Allgemeinen eine komplexe Funktion. Aufspalten in Real- und Imaginärteil liefert:

$$S(f) = \operatorname{Re}\{S(f)\} + j \operatorname{Im}\{S(f)\} \quad (2.16)$$

Eine komplexe Größe  $z = a + jb$  wird grafisch als Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt (Bild 2.10). Auf der x-Achse wird der Realteil und auf der y-Achse der Imaginärteil aufgetragen. Die Länge des Zeigers ist der Betrag  $|z|$ , und der mit der x-Achse gebildete Winkel ist die Phase  $\varphi$  von  $z$ . Für den Real- und den Imaginärteil gilt  $a = |z|\cos\varphi$  bzw.  $b = |z|\sin\varphi$ , und es ist  $z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |z|e^{j\varphi}$ . Letzteres geht auf die eulersche<sup>3</sup> Beziehung  $\exp(\pm j\theta) = \cos\theta \pm j\sin\theta$  zurück. Für  $S(f)$  erhält man damit:

$$S(f) = |S(f)| e^{j\varphi(f)}$$

$$|S(f)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{S(f)\} + \operatorname{Im}^2\{S(f)\}} \quad (2.17)$$

$$\varphi(f) = \arg\{S(f)\} = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{S(f)\}}{\operatorname{Re}\{S(f)\}} \quad \text{für } \operatorname{Re}\{S(f)\} \geq 0$$

Bevor wir uns mit den Eigenschaften der Fourier-Transformation näher beschäftigen, wollen wir zunächst die Transformierte des Rechteckimpulses mithilfe von Gl. (2.14) bestimmen.

<sup>3</sup> Leonhard Euler (1707–1783), schweizer Mathematiker und Physiker.

### Beispiel 2.3 Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses

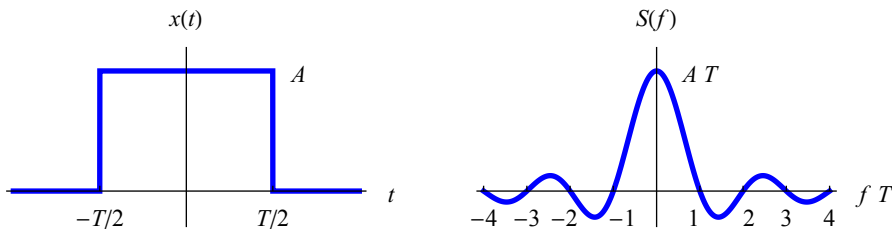
Der Rechteckimpuls  $x(t) = A \operatorname{rect}(t/T)$  hat die Amplitude  $A$  im Intervall  $-T/2 \leq t \leq T/2$  und ist gleich null außerhalb dieses Intervalls (siehe Bild 2.11 links). Die Fourier-Transformierte berechnet sich zu:

$$S(f) = \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j2\pi f t} dt = A \frac{e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}}{-j2\pi f} \quad (2.18)$$

Ersetzt man die beiden Exponentialfunktionen im Zähler von Gl. (2.18) durch die eulersche Beziehung  $\exp(\pm j\theta) = \cos\theta \pm j \sin\theta$ , so vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$S(f) = A \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = A T \operatorname{si}(\pi f T) \quad (2.19)$$

In Gl. (2.19) wird die *si-Funktion*  $\operatorname{si}(x) = \sin(x)/x$  eingeführt<sup>4</sup>. Durch Anwendung der Regel von l'Hospital<sup>5</sup> erhält man den Grenzwert für  $x = 0$  zu  $\operatorname{si}(0) = 1$ . Rechts dieses Wertes besteht die Funktion aus einer mit  $1/x$  abklingenden Sinusschwingung. Für negative  $x$ -Werte verläuft die Funktion spiegelsymmetrisch zur  $y$ -Achse (Bild 2.11 rechts).



**Bild 2.11** Der Rechteckimpuls und dessen Fourier-Transformierte

Wichtige Eigenschaften und Theoreme der Fourier-Transformation und die Transformierten der (in der Nachrichtentechnik) bedeutendsten Signale sind in Anhang 2 zu finden. Die Fourier-Transformation ist eine *lineare Transformation*, d. h., es gilt:

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

$$S(f) = \mathcal{F}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + a_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

Dies folgt direkt aus dem Einsetzen von  $x(t)$  in das Fourier-Integral. Die Summanden können separat integriert werden, und die konstanten Faktoren  $a_1$  und  $a_2$  können vor die Integrale gezogen werden. Die Transformierte des Dirac-Impulses ergibt sich zu:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t} \Big|_{t=0} = 1$$

<sup>4</sup> In der englischsprachigen Literatur wird meist die verwandte Funktion  $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x)/\pi x$  verwendet. Es ist  $\operatorname{sinc}(x) = \operatorname{si}(\pi x)$ .

<sup>5</sup> Guillaume F. A. l'Hospital (1661–1704.), französischer Mathematiker

Betrachten wir umgekehrt einen Dirac-Impuls im Frequenzbereich, so lautet die Rücktransformierte:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f t} \Big|_{f=0} = 1$$

Ein Dirac-Impuls im Zeitbereich hat also ein konstantes, von der Frequenz unabhängiges Fourier-Spektrum, während ein Dirac-Impuls im Frequenzbereich einer Konstanten bzw. einem Gleichanteil im Zeitbereich entspricht. Der *Ähnlichkeitssatz* gibt den Zusammenhang zwischen der Transformierten von  $x(t)$  und dem gedehnten Signal  $x(at)$  an. Mit der Substitution  $\lambda = at$  ist:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j2\pi f \lambda/a} d\lambda = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right)$$

Der *Verschiebungssatz* gibt den Zusammenhang zwischen der Transformierten von  $x(t)$  und dem verschobenen Signal  $x(t - t_0)$  an. Mit  $\lambda = t - t_0$  ist:

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j2\pi f(\lambda+t_0)} d\lambda = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j2\pi f \lambda} d\lambda = S(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

Auf ganz ähnliche Weise erhält man den Zusammenhang bei einer Verschiebung im Frequenzbereich:

$$\mathcal{F}^{-1}\{S(f - f_0)\} = x(t) e^{j2\pi f_0 t}$$

#### Beispiel 2.4 Fourier-Transformierte von $a\delta(t - t_0)$

Die Fourier-Transformierte des mit dem Faktor  $a$  gewichteten und an die Stelle  $t_0$  verschobenen Dirac-Impulses lautet:

$$\mathcal{F}\{a\delta(t - t_0)\} = a e^{-j2\pi f t_0} \quad (2.20)$$

Dies ist ein Ergebnis, auf das wir noch häufig zurückgreifen werden. ■

Periodische Signale können nicht mithilfe von Gl. (2.14) transformiert werden, da das Fourier-Integral für diese Signale nicht existiert<sup>6</sup>. Dies hängt damit zusammen, dass sich für solche Signale die Amplitudendichte auf unendlich schmale Bereiche  $\Delta f \rightarrow 0$  konzentriert. Führt man jedoch den Dirac-Impuls  $\delta(f)$  (mit der Einheit 1/Hz) zur Beschreibung solcher Spektren ein, so lassen sich auch für viele periodische Signale deren Fourier-Transformierte angeben.

#### Beispiel 2.5 Fourier-Transformierte des Kosinus- und des Sinussignals

Wir stellen das Kosinussignal  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$  mit der Amplitude  $A$  und der Frequenz  $f_0$  mithilfe der eulerschen Beziehung  $\exp(\pm j\theta) = \cos\theta \pm j \sin\theta$  durch die Exponentialfunktion dar:

$$A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} \left( e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \right)$$

<sup>6</sup> Eine hinreichende Bedingung für die Existenz des Fourier-Integrals ist die absolute Integrierbarkeit des Signals, d. h., es muss  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$  gelten.

Mithilfe des Satzes für die Verschiebung im Frequenzbereich erhalten wir für die Fourier-Transformierte der beiden Exponentialfunktionen  $\delta(f - f_0)$  und  $\delta(f + f_0)$ . Damit lautet die Fourier-Transformierte der Kosinusfunktion:

$$\mathcal{F}\{A \cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{A}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \tag{2.21}$$

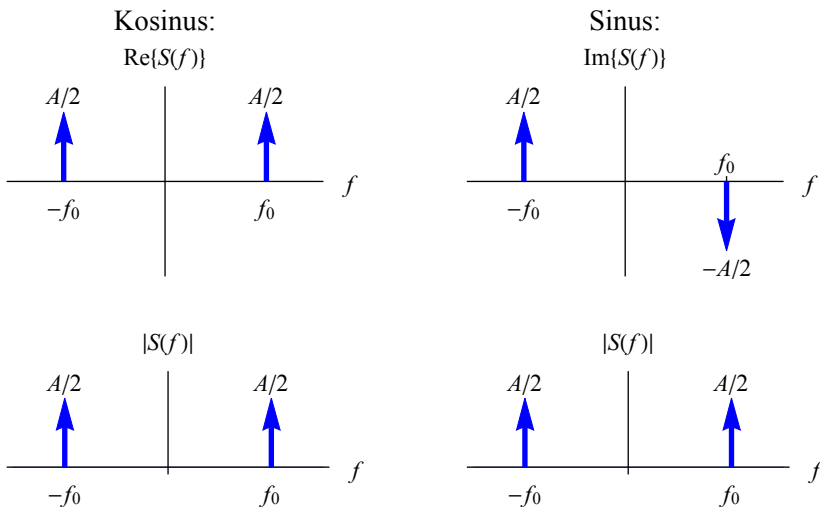
Das Fourier-Spektrum des Kosinussignals ist reell und gerade und besteht aus zwei Dirac-Impulsen bei  $f = f_0$  und  $f = -f_0$  (Bild 2.12 links). Entsprechend schreiben wir für die Sinusfunktion  $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$

$$A \sin(2\pi f_0 t) = -j \frac{A}{2} (e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t})$$

und erhalten für deren Fourier-Transformierte:

$$\mathcal{F}\{A \sin(2\pi f_0 t)\} = -j \frac{A}{2} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)) \tag{2.22}$$

Das Fourier-Spektrum des Sinussignals ist imaginär und ungerade (Bild 2.12 rechts). Der Betrag der beiden Fourier-Spektren ist aber gleich (Bild 2.12 unten).



**Bild 2.12** Fourier-Transformierte des Kosinus- und des Sinussignals



Wie man am letzten Beispiel erkennt, besitzen periodische Signale Linienspektren, d. h., im Spektrum tauchen schmale Linien bei einzelnen Frequenzen auf, die mathematisch durch Dirac-Impulse beschrieben werden. Nichtperiodische Signale wie der Rechteckimpuls in Beispiel 2.3 sind dagegen durch kontinuierliche Spektren gekennzeichnet. Auch die negativen Frequenzen, die in den Spektren auftauchen, erscheinen zunächst sonderbar. Sie sind eine mathematische Konsequenz der Definition der Fourier-Transformation gemäß den Gln. (2.14) und (2.15). In den Beispielen 2.3 und 2.4 sind sie erforderlich, um reelle Signale im Zeitbereich zu erhalten. Auch das Abtasttheorem (Abschnitt 3.1) wird nur verständlich, wenn die spektralen Anteile bei negativen Frequenzen einbezogen werden.