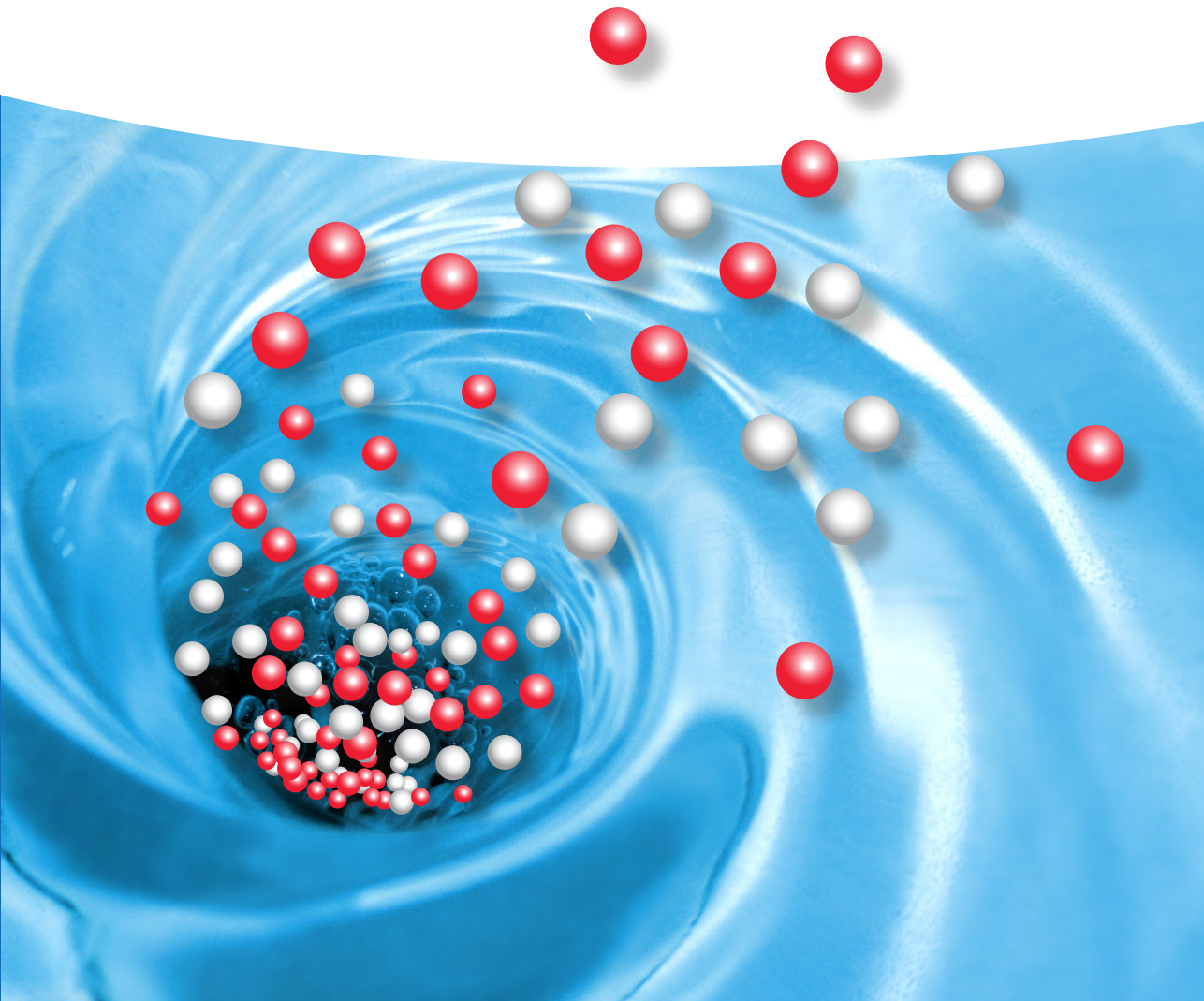


Rüdiger Worthoff

Technische Rheologie

in Beispielen und Berechnungen



Rüdiger Worthoff

Technische Rheologie

Beachten Sie bitte auch weitere interessante Titel zu diesem Thema

Wegener, E.

**Planung eines
Wärmeübertragers**
Ganzheitliche Aufgabenlösung bis zur
Instandsetzung eines
Rohrbündel-Wärmeübertragers

2013

ISBN: 978-3-527-33304-2

Worthoff, R., Siemes, W.

**Grundbegriffe der
Verfahrenstechnik**
Mit Aufgaben und Lösungen, Dritte,
vollständig überarbeitete Auflage

2012

ISBN: 978-3-527-33174-1

Müller, H.

**Verfahrens- und
energietechnische
Kompositionsregeln**

2011

ISBN: 978-3-527-32778-2

Wiley-VCH (Hrsg.)

**Ullmann's Reaction
Engineering**
2 Volume Set

2013

ISBN: 978-3-527-33371-4

Shaw, M.T.

**Introduction to Polymer
Rheology**

2012

ISBN: 978-0-470-38844-0

Kontopoulou, M. (Hrsg.)

Applied Polymer Rheology
Polymeric Fluids with Industrial
Applications

2012

ISBN: 978-0-470-41670-9

Tadros, T.F.

Rheology of Dispersions
Principles and Applications

2010

ISBN: 978-3-527-32003-5

Rüdiger Worthoff

Technische Rheologie

in Beispielen und Berechnungen

WILEY-VCH
Verlag GmbH & Co. KGaA

Autor

Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Worthoff
Aachen

■ Alle Bücher von Wiley-VCH werden sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren, Herausgeber und Verlag in keinem Fall, einschließlich des vorliegenden Werkes, für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler irgendeine Haftung

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2013 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Boschstr. 12, 69469 Weinheim, Germany

Alle Rechte, insbesondere die der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form – durch Photokopie, Mikroverfilmung oder irgendein anderes Verfahren – reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere von Datenverarbeitungsmaschinen, verwendbare Sprache übertragen oder übersetzt werden. Die Wiedergabe von Warenbezeichnungen, Handelsnamen oder sonstigen Kennzeichen in diesem Buch berechtigt nicht zu der Annahme, dass diese von jedermann frei benutzt werden dürfen. Vielmehr kann es sich auch dann um eingetragene Warenzeichen oder sonstige gesetzlich geschützte Kennzeichen handeln, wenn sie nicht eigens als solche markiert sind.

Print ISBN 978-3-527-33604-3

ePDF ISBN 978-3-527-67554-8

ePub ISBN 978-3-527-67556-2

mobi ISBN 978-3-527-67555-5

oBook ISBN 978-3-527-67557-9

Umschlaggestaltung Blue Sea Design, Simone Benjamin, McLeese Lake, Canada

Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Druck und Bindung Markono Print Media Pte Ltd, Singapore

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Printed in Singapore

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| | Vorwort | <i>IX</i> |
| | Wichtige Formelzeichen | <i>XI</i> |
| | Teil I Theoretische Grundlagen der Rheologie | <i>1</i> |
| 1 | Theoretische Grundlagen | <i>3</i> |
| | Teil II Technische Anwendungen der Rheologie | <i>15</i> |
| 2 | Allgemeine Grundbegriffe | <i>17</i> |
| 2.1 | Ableitungen | <i>17</i> |
| 2.2 | Materielle Objektivität | <i>18</i> |
| 2.3 | Bilanzen in algebraischer Darstellung | <i>18</i> |
| 2.4 | Die Massenbilanz in Koordinatenform | <i>19</i> |
| 2.5 | Die Impulsbilanz in Koordinatenform | <i>19</i> |
| 2.6 | Symmetrie des Spannungstensors | <i>21</i> |
| 2.7 | Temperatur- und Druckabhängigkeit der Viskosität | <i>21</i> |
| 2.8 | Scheinbare Viskosität | <i>22</i> |
| 2.9 | Repräsentative Viskosität | <i>23</i> |
| 2.10 | Repräsentativer Radius bei Rohrströmungen | <i>23</i> |
| 2.11 | Dehnaviskosität | <i>24</i> |
| 2.12 | Volumenviskosität | <i>26</i> |
| 2.13 | Fließmodelle | <i>26</i> |
| 2.14 | Kriechfunktion und Relaxationsfunktion | <i>29</i> |
| 2.15 | Instationäres Fließen | <i>31</i> |
| 2.16 | Jeffreys-Oldroyd-Substanz bei Schichtenströmungen | <i>32</i> |
| 3 | Rheometrie | <i>35</i> |
| 3.1 | Rohr-Rheometer | <i>36</i> |
| 3.1.1 | Auswertebeziehung | <i>36</i> |
| 3.1.2 | Newtonsche Fluide | <i>38</i> |
| 3.1.3 | Einlaufeffekte | <i>39</i> |
| 3.1.4 | Normalspannungskomponenten | <i>40</i> |
| 3.1.5 | Normalspannungsgradienten | <i>40</i> |
| 3.1.6 | Bestimmung der Fließfunktion | <i>41</i> |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.1.7 | Repräsentative Größen im Rohrrheometer | 42 |
| 3.1.8 | Wandgleitende Medien | 43 |
| 3.1.9 | Ringspalt-System | 44 |
| 3.2 | Couette-Rheometer | 48 |
| 3.2.1 | Deformationsgeschwindigkeit | 48 |
| 3.2.2 | Auswertebeziehung für die Fließfunktion | 49 |
| 3.2.3 | Newtonsche Flüssigkeiten | 51 |
| 3.2.4 | Einzylindersysteme | 51 |
| 3.2.5 | Enge Spaltgeometrie | 52 |
| 3.2.6 | Normalspannungsfunktionen | 52 |
| 3.2.7 | Ostwald-de-Waele-Flüssigkeit | 53 |
| 3.2.8 | Messung kleiner Schergeschwindigkeiten | 55 |
| 3.2.9 | Hämorrheometrie | 57 |
| 3.3 | Kegel-Platte-Rheometer | 59 |
| 3.3.1 | Auswertungsbeziehungen für die Fließkurve | 60 |
| 3.3.2 | Normalspannungsfunktionen | 61 |
| 3.3.3 | Fehlerkalkulation | 62 |
| 3.3.4 | Jeffreys-Oldroyd-Flüssigkeit | 63 |
| 3.4 | Kugel-Kugel-Rheometer | 64 |
| 3.5 | Scheiben-Rheometer | 67 |
| 4 | Rohrströmung | 71 |
| 4.1 | Ostwald-de-Waele-Fluide | 71 |
| 4.2 | Rabinowitsch-Fluide | 75 |
| 4.3 | Prandtl-Eyring-Fluide | 77 |
| 4.4 | Bingham-Substanzen im waagrechten Rohr | 78 |
| 4.5 | Bingham-Substanz in senkrechtem Rohr | 80 |
| 4.6 | Newtonsche Fluide im coaxialen Ringrohr | 81 |
| 4.7 | Ostwald-de-Waele-Fluide im coaxialen Ringrohr | 83 |
| 4.8 | Bypass mit Potenzflüssigkeit | 85 |
| 4.9 | Blutströmung | 86 |
| 4.10 | Repräsentative Viskosität für Fließgesetze | 88 |
| 4.11 | Druckverlustrechnung eines Potenzfluids | 89 |
| 4.12 | Pumpleistung für eine Bingham-Substanz | 90 |
| 4.13 | Elementare Berechnung der repräsentativen Viskosität | 91 |
| 4.14 | Pipelinekalkulation | 92 |
| 4.15 | Maxwell-Fluide | 93 |
| 4.16 | Freistrahler | 95 |
| 4.17 | Rohrströmung bei poröser Wand | 98 |
| 4.18 | Drahtisolierung | 100 |
| 4.19 | Kennzahlen für eine Rabinowitsch-Flüssigkeit | 103 |
| 4.20 | Scale-up | 104 |
| 5 | Strömungen in Rührwerken | 107 |
| 5.1 | Zylinderrührwerk | 107 |
| 5.2 | Bingham-Substanz | 110 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.3 | Prandtl-Eyring-Flüssigkeit | 111 |
| 5.4 | Auslaufvorgang | 112 |
| 5.5 | Elementare Leistungsberechnung | 114 |
| 5.6 | Rührkesselreaktor | 116 |
| 5.7 | Lagerkräfte | 118 |
| 5.8 | Modellübertragung | 120 |
| 5.9 | Scale-up | 122 |
| 6 | Strömungen in unterschiedlichen Geometrien | 125 |
| 6.1 | Strömung zwischen parallelen Ebenen | 125 |
| 6.2 | Radialströmung in einem Scheibenspalt | 126 |
| 6.3 | Ostwald-de-Waele-Fluide auf schiefer Ebene | 129 |
| 6.4 | Bingham-Flüssigkeit auf schiefer Ebene | 130 |
| 6.5 | Strömung durch eine Kreisdüse | 131 |
| 6.6 | Strömung durch eine Breitschlitzdüse | 133 |
| 6.7 | Repräsentative Werte für den Rechteckkanal | 135 |
| 6.8 | Bingham-Substanz in Extrudern | 136 |
| 6.9 | Rabinowitsch-Flüssigkeit in Extrudern | 138 |
| 6.10 | Extruderwerkzeuge | 140 |
| 6.11 | Kalanderströmung | 141 |
| 6.12 | Strömung durch eine hyperboloidische Verengung | 144 |
| 6.13 | Strömung durch einen Hyperbelspalt | 148 |
| 7 | Wärmeübertragungsprobleme an rheologischen Medien | 153 |
| 7.1 | Wärmeübergang von einer beheizten Behälterwand an eine Rabinowitsch-Flüssigkeit | 153 |
| 7.2 | Wärmeübergang von einer beheizten Rohrwand an eine durchströmende Prandtl-Eyring-Flüssigkeit | 156 |
| 7.3 | Wärmeübertragungscharakteristik für Ostwald-de-Waele-Flüssigkeiten in beheizten Rohren | 158 |
| 7.4 | Wärmeübertragungscharakteristik für Bingham-Substanzen in beheizten Rohren | 159 |
| | Glossar | 161 |
| | Literatur | 165 |
| | Antworten auf die Fragen zur Selbstkontrolle | 169 |
| | Index | 179 |

Vorwort

Fast alle Apparate und Anlagen der chemischen Technologie sind durchströmt oder erzeugen selbst Strömungen. Dabei zeigen die zu verarbeitenden Medien im Fall einer Flüssigkeitsströmung oft ein nichtnewtonsches Verhalten. Insbesondere durch viskoelastische Eigenschaften werden Strömungsanomalien erzeugt, die den Produktionsablauf entscheidend stören können. Auch das im Allgemeinen nichtlineare Stoffverhalten der beschreibenden Parameter hat beispielsweise bei der mathematischen Lösung der Bilanzgleichungen zu einer hohen Komplexizität beigetragen. Hinzu kommt, dass rheologische Substanzen oft ein Erinnerungsvermögen an Belastungs- und Strömungszustände der Vergangenheit entwickeln. Dies hat zu einer allgemeinen Forschungstätigkeit auf dem Feld der theoretischen Rheologie geführt. In diesem Buch wird – nach einer kurzen Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen – die „Technische Rheologie“ in Fragen und Antworten abgehandelt, wobei das Ziel ist, eine praxisnahe und anschauliche Darstellung über das Stoffverhalten zu geben. An Hand ausgewählter Beispiele soll der Lehrstoff verdeutlicht werden. Dabei wird ausgiebig Wert auf die mathematische Behandlung von Anwendungsproblemen gelegt. Schließlich muss der Ingenieur vor Ort rheologische Probleme nicht nur qualitativ beurteilen, sondern Apparate und Anlagen mit rheologisch komplexen Fluiden auslegen und optimieren können. Das Buch versucht die Kenntnisse hierzu zu vermitteln. Die Beispiele sind auf dem Niveau von Klausuraufgaben. Sie eignen sich darum auch zur Examensvorbereitung für Studierende an Technischen Universitäten und Fachhochschulen, insbesondere der Kunststoffverarbeitung, der Verfahrenstechnik und des Chemieingenieurwesens.

Aachen, 2013

R. Worthoff

Wichtige Formelzeichen

| | |
|-----------------|--|
| a | isotroper Druck (Pa) |
| a | 1. Rabinowitsch-Parameter (Pa) |
| c | 2. Rabinowitsch-Parameter (s^{-1}) |
| c_p, c_v | spez. Wärmen ($m^2 s^{-3} K^{-1}$) |
| d | Durchmesser (m) |
| \vec{e} | Einheitsvektor |
| g | Erdbeschleunigung ($m s^{-2}$) |
| h | Höhe (m) |
| \hbar | plancksche Konstante ($W s^2$) |
| k | Konsistenzfaktor ($Pa s^m$) |
| k | boltzmannsche Konstante ($W s K^{-1}$) |
| l | Länge (m) |
| m | Fließindex |
| n | Drehfrequenz (s^{-1}) |
| \vec{n} | Normalenvektor |
| p | Druck (Pa) |
| \dot{q} | Volumenstrom pro Breitereinheit ($m^2 s^{-1}$) |
| r | Radialkoordinate (m) |
| t | Zeitkoordinate (s) |
| v | Partikelgeschwindigkeit ($m s^{-1}$) |
| \bar{v} | mittlere Geschwindigkeit ($m s^{-1}$) |
| x, y, z | Koordinaten (m) |
| A | 1. Prandtl-Parameter (Pa) |
| B | Breite (m) |
| Bu | Buckingham-Kennzahl |
| C | 2. Prandtl-Parameter (s^{-1}) |
| D | Durchmesser (m) |
| \underline{D} | Deformationsgeschwindigkeitstensor (s^{-1}) |
| E | Elastizitätsmodul (Pa) |
| F | Kraft (N) |
| Fr | Froud-Kennzahl |
| H | Höhe (m) |

| | |
|-------------------------------|--|
| I | Impuls (N s) |
| I_j | Tensor-Invarianten |
| L | Länge (m) |
| M | Drehmoment (N m) |
| R | fester Radius (m) |
| R | allgemeine Gaskonstante ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$) |
| Re | Reynolds-Kennzahl |
| Sp | Spur eines Tensors |
| T | absolute Temperatur (K) |
| \underline{U} | Verzerrungstensor |
| \dot{V} | Volumenstrom ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$) |
| \underline{W} | Rotationstensor |
| α, β, φ | Winkel |
| γ | Scherwinkel |
| $\dot{\gamma}$ | Deformationgeschwindigkeit (s^{-1}) |
| ε | Dehnung |
| η | dynamische Viskosität (Pa s) |
| η_P | plastische Viskosität (Pa s) |
| η_S | scheinbare Viskosität (Pa s) |
| η_{rep} | repräsentative Viskosität (Pa s) |
| λ | Wärmeleitfähigkeit ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$) |
| ξ | Rohrreibungskennzahl |
| ρ | Stoffdichte (kg m^{-3}) |
| $\underline{\sigma}$ | Spannungstensor (Pa) |
| τ | Schubspannung (Pa) |
| τ_R | Wandschubspannung (Pa) |
| τ_0 | Grenzschubspannung (Pa) |
| φ, ϑ | zylindrische Koordinaten |
| ω | Winkelgeschwindigkeit (s^{-1}) |
| ∇ | Nabla-Operator |
| Δ | Differenz |
| $\frac{d}{dt}$ | totale zeitliche Ableitung (s^{-1}) |
| $\frac{\partial}{\partial t}$ | partielle zeitliche Ableitung (s^{-1}) |
| $\frac{D}{Dt}$ | substanzielle zeitliche Ableitung (s^{-1}) |
| $\frac{\delta}{\delta t}$ | materielle zeitliche Ableitung (s^{-1}) |

Teil I
Theoretische Grundlagen der Rheologie

1

Theoretische Grundlagen

Die Eigenschaften mechanischer Kontinua werden klassisch für Festkörper durch die hookesche Festigkeitshypothese $\tau = E\varepsilon$ oder für die Fluidreibung durch den newtonschen Ansatz $\tau = \eta\dot{\gamma}$ beschrieben. Hierin ist τ die Schubspannung, die durch eine äußere Kraft \vec{F} auf eine belastete Fläche \vec{A} des Kontinuums entsteht, E das Elastizitätsmodul und η die dynamische Viskosität. ε ist die Dehnung und $\dot{\gamma}$ der Schergradient; mit $\varepsilon = \Delta l/l$ (wobei Δl die Längenänderung auf Grund der Belastung und l die unbelastete Ursprungslänge ist) und $\dot{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{d\vec{r}}$ (wobei $d\vec{v}$ die Geschwindigkeitsänderung entlang der zu \vec{v} senkrechten Koordinatenrichtung \vec{r} ist). Das Versagen dieser Gesetze gegenüber den komplexen Medien der modernen Stoffchemie ergab den Anstoß der Entwicklung der Physik der nichthookeschen Körper bzw. der nichtnewtonschen Fluide. Das letztere Wissensgebiet wird heute allgemein mit Rheologie (Fließkunde) bezeichnet. Im Folgenden soll die Rheologie auf stofflich homogene unpolare Kontinua beschränkt bleiben, bei denen keine physikalische Änderung oder chemische Umsetzung erfolgt. Homogene Kontinua sind solche, die mathematisch durch stetig differenzierbare Funktionen beschrieben werden können. Für ein fluides Kontinuum kann mit $\vec{v}(\vec{x}, t)$ ein zeitabhängiges Geschwindigkeitsfeld definiert werden [1]. Als Lösung der Differenzialgleichung

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t) \quad (1.1)$$

mit der Anfangsbedingung $\vec{x}(t_0) = \vec{X}$ ergeben sich die Bahnkurven (Teilchenbahnen) $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$ der materiellen Punkte \vec{X} , die durch ihre Koordinaten zur Zeit $t = t_0$ gekennzeichnet sind. Die materielle Geschwindigkeit (Teilchengeschwindigkeit) ist durch

$$\vec{v}(\vec{X}, t) = \left. \frac{D[\vec{x}(\vec{X}, t)]}{Dt} \right|_{\vec{x}=\text{const}} \quad (1.2)$$

und die materielle Beschleunigung (Teilchenbeschleunigung) durch

$$\vec{a}(\vec{X}, t) = \left. \frac{D[\vec{v}(\vec{X}, t)]}{Dt} \right|_{\vec{x}=\text{const}} \quad (1.3)$$

gegeben. $\frac{D}{Dt}$ ist die substantielle Zeitableitung. Sie ist für eine Funktion f in einem Geschwindigkeitsfeld \vec{v} mit den Vektorkomponenten v_i definiert zu

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f \quad (1.4)$$

mit dem Operator $\nabla = \vec{e}^i \frac{\partial}{\partial x_i}$; \vec{e}^i sind Einheitsvektoren. Außerdem soll hier und im Folgenden die einsteinsche Summenkonvention gelten. Das heißt, tritt in einem Produkt ein und derselbe Index zweimal auf, so ist über diesen von 1 bis n zu summieren (im Weiteren ist n immer $n = 3$). Hochgestellte Indizes bei \vec{e}^i sind keine Exponenten, sondern sollen zeigen, dass die Darstellung auch für allgemeine Koordinaten, z. B. hyperbolische, gilt. Betrachtet man nun die Relativbewegung zweier benachbarter Punkte mit dem Abstand $d\vec{x} = \vec{e}^i dx_i$, dann ist als Maß für die Deformationsgeschwindigkeit die materielle Zeitableitung $\frac{D(d\vec{x})}{Dt}$ anzusehen. Sie ergibt sich in Komponentenschreibweise zu

$$\frac{D(d\vec{x})}{Dt} = \vec{e}^i \frac{\partial v_i}{\partial x^j} dx_j . \quad (1.5)$$

Es gilt

$$d\vec{x} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{D(d\vec{x})}{Dt} \quad \text{und} \quad \nabla \vec{v}^T d\vec{x} = \frac{D(d\vec{x})}{Dt} . \quad (1.6)$$

$\nabla \vec{v}^T$ ist der zu $\nabla \vec{v}$ transponierte Tensor. $\nabla \vec{v}$ und $\nabla \vec{v}^T$ sind über die Beziehung

$$\nabla \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}^T = \underline{I}$$

miteinander verknüpft mit \underline{I} als Einheitstensor. Für eine Deformation eines Fluids kann die Vektorrichtung von $d\vec{x}$ nicht relevant sein, so dass es sinnvoll ist den Betrag von $d\vec{x}$ oder gleichwertig das Quadrat $(d\vec{x})^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x}$ zu betrachten. Dann gilt

$$\frac{D}{Dt} [(d\vec{x})^2] = 2d\vec{x} \frac{D(d\vec{x})}{Dt} = d\vec{x} \cdot 2\underline{D} \cdot d\vec{x} . \quad (1.7)$$

\underline{D} ist also ein Tensormaß für die Geschwindigkeit, mit der das Abstandsquadrat $(d\vec{x})^2$ deformiert wird. Man nennt \underline{D} darum Deformationsgeschwindigkeitstensor. Unter Beachtung von Gln. (1.6) und (1.7) gilt für \underline{D} dann

$$\underline{D} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T) . \quad (1.8)$$

Die Bedeutung von \underline{D} wird auch verständlich, wenn man für die Aussage $\underline{D} = 0$ das Gleichungssystem

$$D_{ik} = 0 \quad (1.9)$$

betrachtet. Als eindeutige Lösung findet man

$$\vec{v} = \vec{\omega}_0 \times d\vec{x}_0 + \vec{v}_0$$

mit $\vec{\omega}_0$ als Rotationsgeschwindigkeitsvektor. Der erste Term beschreibt eine starre Drehung, der zweite eine reine Translation. Für diesen Fall ist das Medium rheologisch also nicht belastet. Insofern ist die Aussage, dass hier der Deformationsgeschwindigkeitstensor identisch gleich null ist, obwohl das Medium in Bewegung ist, plausibel [6].

Es ist eine Besonderheit komplexer Fluide, dass der momentane Spannungszustand im Medium nicht nur von der augenblicklichen Bewegung abhängt, sondern auch von seiner Bewegungsgeschichte $\vec{\xi}(\vec{X}, t)$. Diese Funktion beschreibt für ein Teilchen \vec{X} den kinematischen Ablauf in der Vergangenheit mit der Randbedingung $\vec{\xi} = \vec{x}$ für $t = \tau$. In der einschlägigen Literatur sind noch folgende Deformationsmaße üblich

- der relative Deformationstensor $\underline{F}_R = \nabla \vec{\xi}$;
- der relative Cauchy-Green-Tensor $\underline{C}_R = \nabla \vec{\xi} \cdot \nabla \vec{\xi}^T$.

Die Aufteilung von \underline{F}_R nach Cauchy entsprechend

$$\underline{F}_R = \underline{R} \cdot \underline{U} = \underline{V} \cdot \underline{R}$$

definiert aus \underline{F}_R den rechten und linken Strecktensor \underline{U} und \underline{V} , wobei \underline{R} ein orthogonaler Tensor mit den Eigenschaften

$$\underline{R} \cdot \underline{R}^T = \underline{R}^T \cdot \underline{R} = \underline{I} \quad \text{und} \quad \det \underline{R} = 1$$

ist. \underline{U} bzw. \underline{V} sind die *rheologisch relevanten* Deformationsmaße.¹⁾ Weiterhin ist schließlich noch die Deformationsgeschichte $\underline{G}(\tau)$ von Bedeutung

$$\underline{G}(\tau) = \underline{C}_R - \underline{I}. \quad (1.10)$$

Anstatt der zitierten Deformationsmaße sind gleichwertig auch abgewandelte Maße zu verwenden. Bei hieraus abgeleiteten Approximationsbeziehungen können allerdings unterschiedliche rheologische Eigenschaften erhalten werden. Die Einschränkung einer allgemeinen rheologischen Zustandsgleichung auf Materialien, die der Isomorphie, Isothermie und Beanspruchungsfestigkeit genügen, führt auf die Form [1]

$$\underline{\sigma} = \int_{\tau=-\infty}^t \mathcal{F}[\underline{F}_R(\tau)], \quad (1.11)$$

die für inkompressible Fluide noch zu

$$\underline{\sigma} = a \underline{I} + \int_{\tau=-\infty}^t \mathcal{F}[\underline{G}(\tau)] \quad (1.12)$$

konkretisiert werden kann mit a als rheologisch unbestimmten isotropen Anteil des Spannungstensors $\underline{\sigma}$. Das Funktional \mathcal{F} muss die Forderung nach materieller Objektivität erfüllen. Entwickelt man $\underline{G}(\tau)$ in eine Taylorreihe, ergibt sich

$$\underline{G}(\tau) = \underline{G}(t) + (\tau - t) \frac{D[\underline{G}(t)]}{D\tau} \Big|_{\tau=t} + \frac{(\tau - t)^2}{2} \frac{D^2[\underline{G}(t)]}{(D\tau)^2} \Big|_{\tau=t} + \dots \quad (1.13)$$

1) Neben \underline{U} und \underline{V} sind auch deren Quadrate $\underline{U}^2 = \underline{B}$ und $\underline{V}^2 = \underline{C}$ gebräuchlich.

Die Ableitungen $\frac{D^n[G(t)]}{(D\tau)^n}|_{\tau=t}$ lassen sich durch die korotationale zeitliche Ableitungen des Deformationsgeschwindigkeitstensors $\frac{\delta^n \underline{D}}{\delta t^n} = \underline{\overset{(n)}{D}}$ ausdrücken [6] mit

$$\underline{\overset{(n)}{D}} = \frac{D^n \underline{D}}{D t^n} + \underline{W} \cdot \frac{D^{n-1} \underline{D}}{\partial t^{n-1}} - \frac{D^{n-1} \underline{D}}{\partial t^{n-1}} \cdot \underline{W}, \quad (1.14)$$

wobei $\underline{W} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{v} - \nabla \vec{v}^T)$ ist. Konvergiert die Reihe, so gilt die Approximation

$$\underline{\sigma} = a \underline{I} + f(\underline{D}, \underline{\overset{\circ}{D}}, \underline{\overset{\circ\circ}{D}} \dots \underline{\overset{(n)}{D}}) \quad (1.15)$$

bzw. in Entwicklungsschreibweise

$$\underline{\sigma} = a \underline{I} + \alpha_1 \underline{D} + \alpha_2 \underline{D}^2 + \alpha_3 \underline{\overset{\circ}{D}} + \alpha_4 \underline{D}^3 + \alpha_5 (\underline{D} \cdot \underline{\overset{\circ}{D}} + \underline{\overset{\circ}{D}} \cdot \underline{D}) + \alpha_6 \underline{\overset{\circ\circ}{D}} + \dots \quad (1.16)$$

Die α_i -Größen stellen rein rheologische Materialparameter dar. Gleichung (1.16) eignet sich besonders zur Beschreibung stationärer Prozesse. Zur Interpretation von Relaxationserscheinungen empfiehlt sich dagegen eine Integralentwicklung der Gl. (1.17), die über skalare Relaxationsfunktionen κ_i den Spannungstensor auf die Deformationsgeschichte zurückführt [12]

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} = a \underline{I} + \int_{-\infty}^t \kappa_1(t-\tau) \underline{G}(t-\tau) d\tau \\ + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \kappa_2[(t-\tau_1), (t-\tau_2)] \underline{G}(t-\tau_1) \cdot \underline{G}(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \end{aligned} \quad (1.17)$$

Während die Ordnung der Entwicklung von Gl. (1.16) am Betrag der kinematischen Beanspruchung des Mediums gemessen wird, wird die Ordnung der Entwicklung von Gl. (1.17) durch die Norm der Deformationsgeschichte bestimmt. Die Norm entscheidet darüber, welcher Abschnitt $d\tau_i$ in der Vergangenheit für den aktuellen Spannungszustand des Mediums am prägnantesten war. Solange sich ein materielles Teilchen nur translatorisch und rotatorisch mit seiner Umgebung mitbewegt, ist es – wie erwähnt – rheologisch nicht beansprucht. Darum ist hier die korotationale Zeitableitung $\frac{\delta}{\delta t}$, die als natürliches Bezugssystem den mit einem Teilchen mitbewegten Rahmen verwendet, relevant.

Bei den Gleichungen (1.16) und (1.17) handelt es sich um sogenannte Zustandsfunktionen. Sie spiegeln die Materialeigenschaften der Fluide wider. Zur Schließung der Bestimmungsgleichungen (Massen-, Impuls- und Energiebilanzen) sind sie neben den Randbedingungen zwingend erforderlich. Sie verknüpfen nicht nur den momentanen Deformationszustand mit dem Spannungszustand, sondern stellen zusätzlich auch dessen Abhängigkeit von den Änderungsgeschwindigkeiten des Deformationszustandes her. Dies soll insbesondere der Tatsache Rechnung