Meiner Philosophische Bibliothek

Bertrand Russell

Einführung in die mathematische Philosophie

BERTRAND RUSSELL

Einführung in die mathematische Philosophie

Mit einer Einleitung von
MICHAEL OTTE

herausgegeben von
JOHANNES LENHARD
und MICHAEL OTTE

FELIX MEINER VERLAG
HAMBURG

PHILOSOPHISCHE BIBLIOTHEK BAND 536

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN-13: 978 3-7873-1828-5
ISBN-10: 3-7873-1828-3

2. Auflage 2006

Titel der Originalausgabe: Bertrand Russell, An Introduction to Mathematical Philosophy. Originally published: 2nd ed. London: G. Allen and Unwin; New York: Macmillan, 1919.
Satz: Kusel, Hamburg. Druck: Carstens, Schneverdingen. Buchbinderische Verarbeitung: Schaumann, Darmstadt. Einbandgestaltung: Jens Peter Mardersteig. Werkdruckpapier: alterungsbeständig nach ANSI-Norm resp. DIN-ISO 9706, hergestellt aus 100% chlorfrei gebleichtem Zellstoff. Printed in Germany.

INHALT

EINLEITUNG

Michael Otte

I.

Das Buch ist sehr anregend zu lesen, wie beinahe alles, was Bertrand Russell geschrieben hat, und es ist ein Buch von der Art, wie es nur jemand wie Russell schreiben kann, wenn er im Gefängnis sitzt und keine Hilfsmittel hat und sich daher entschließt, allen technischen Ballast abzustreifen und sich in einer mehr oder minder populären Darstellung zu ergehen. Russells »Einführung in die mathematische Philosophie« von 1919 ist in diesem Sinne zuweilen und mit Recht »eine bewundernswerte Exposition des Monumentalwerks *Principia Mathematica*« genannt worden. Das Buch ist noch mehr, insofern in seine Abfassung die Ergebnisse aller grundlegenden Arbeiten Russells seit etwa 1900 eingeflossen sind. Und es ist zugleich etwas anderes, insofern es eine relativ eigenständige Einführung in die Grundlagen der Mathematik und der Erkenntnistheorie darstellt.

Anders als die heute üblichen Texte im Bereich der Philosophie der Mathematik läßt Russell einen immer an seinem Denken teilhaben, an seinen Vermutungen und Irrtümern und an der Begeisterung, die er bei der Beschäftigung mit seinem Gegenstand empfindet. Da er einer der herausragenden Protagonisten des modernen wissenschaftlichen Empirismus und einer der Begründer der heute dominierenden Philosophie der Mathematik ist, gewinnt man auf diese Weise aus seinen Schriften einen einzigartigen Eindruck in die Wechselfälle und Ideen der erkenntnistheoretischen und logischen Diskussionen dieses Jahrhunderts. Das Programm der logischen Weltauffassung, wie es unter anderem von Frege und Russell inauguriert und von ihren Schülern – zum Beispiel Carnap und Quine

– fortgeführt worden ist, mag sehr trocken, technisch und gleichsam objektivistisch unmenschlich erscheinen, aber die dahinterstehende Intention war durch und durch in einem humanen und aufklärerischen Fortschrittsglauben verankert.

Die Forderung nach einer strikt logisch-wissenschaftlichen Arbeitsweise sollte einem dumpfen Irrationalismus und Traditionalismus entgegenwirken. Wie es einer von Russells Schülern, Rudolf Carnap, im Vorwort zu seinem 1928 erschienenen Werk »Der logische Aufbau der Welt« ausgedrückt hat, wird die logische Philosophie von dem Glauben getragen, daß einer »Gesinnung die Zukunft gehört, […] die überall auf Klarheit geht und doch dabei die nie ganz durchschaubare Verflechtung anerkennt« und die daher »logische Klarheit der Begriffe«, »Sauberkeit der Methoden« und »Verantwortlichkeit der Thesen« in den Dienst eines Erkenntnisfortschritts durch Zusammenarbeit stellt (Carnap, 1928/1998, Vorwort zur ersten Auflage).

Es erscheint nicht zuletzt angesichts der Tatsache, daß die Philosophie der Mathematik und die gegenwärtige analytische Wissenschaftstheorie von Russell zwar die »technischen Errungenschaften« übernommen haben, aber ansonsten kein Wort über die damit verbundenen philosophischen und historischen Anliegen verlieren, angebracht, auf den historischen Ursprung der modernen Mathematik und Erkenntnistheorie und auf den kulturellen und politischen Entstehungszusammenhang hinzuweisen. Mathematik und Logik entwickelten sich seit der Ausbreitung der industriellen Revolution im 19. Jahrhundert zunehmend unter dem Imperativ, vor allem der Kommunikation und der präziseren Verständigung zu dienen und weniger der Sicherung eines allgemein verbindlichen Weltbildes. Und hier gibt es so etwas wie eine Heisenbergsche Unschärferelation: Je differenzierter die Begriffsbildung im einzelnen wird, desto unbestimmter erscheinen die ontologischen Grundlagen und Gesamtzusammenhänge und umgekehrt. Logische und empirisch-anschauliche Grundlagen eines Arguments sind, so sagt Russell, etwas durchaus Verschiedenes und begrenzen sich gegenseitig in ihren Ansprüchen.

Russell ist immer ein unabhängiger Geist gewesen, dem die Beschränkung auf ein besonderes Gebiet fremd blieb und der sich bemühte, alle Entwicklungen der Mathematik, der Philosophie, der experimentellen Naturwissenschaften, aber auch die der Politik zu verfolgen, und er schrieb in seinem Leben über eine beeindruckende Vielfalt von Gebieten, meistens mit großer Anschaulichkeit, so daß viele seiner Bücher im besten Sinne Popularwissenschaft darstellten. Es war ihm dies nicht nur aufgrund seines umfassenden Studiums möglich, sondern basierte auch auf seiner Überzeugung, daß Schreiben seine eigentliche Berufung sei.

II.

Der hauptsächliche Gegenstand des Buches ist die Zahl und alles was zur Zahl, zur Arithmetik und zur Logik der Arithmetik gehört. Die Frage nach der Bedeutung der Zahlen und der Arithmetik steht überhaupt im Zentrum von Russells Interesse an der Mathematik und der Logik. Seit Beginn des 19. Jahrhunderts war die Mathematik u. a. durch einen starken Arithmetisierungstrend gekennzeichnet. Nun sollte die Begründung derselben durch eine Logisierung der Arithmetik selbst vollendet werden. Wenn hier jedoch von Begründung die Rede ist, dann geht es für Russell nicht so sehr um eine Klärung der ontologischen Grundlagen der Arithmetik bzw. der Mathematik insgesamt, sondern um eine Differenzierung des Begriffsapparates und um eine logische Präzisierung der Ableitungsmethoden. Wir werden im folgenden noch sehen, daß sich beide möglichen Ziele sehr oft gegenseitig in die Quere kommen.

Russell ist die neue Logik zum erstenmal auf dem internationalen Philosophenkongreß von 1900 in Paris begegnet, und zwar in der Gestalt von Peano. Und sosehr er auch beeindruckt war von der logischen Präzision Peanos, sowenig seinem eigenen Naturell und seinen an der Arithmetisierung der Mathematik ausgerichteten Interessen entsprechend empfand er doch die aus dem algebraischen und axiomatischen Denken herausgewachsene Form der Logik. Er selbst beschreibt ihre Entwicklung folgendermaßen: »An sich war die mathematische Logik damals (d. h. um 1900) schon längst kein ganz neues Fach mehr. [...] Boole hatte seine *Laws of Thought* 1854 veröffentlicht; C.S. Peirce hatte eine Relationenlogik ausgearbeitet, und Schröder hatte in Deutschland ein umfängliches dreibändiges Werk veröffentlicht, in dem er alles bisher Erreichte zusammengefaßt hatte. Whitehead hatte den Booleschen Kalkül im ersten Teil seiner *Universal Algebra* behandelt [die 1898 erschienen war und in der neben den genannten Autoren auch Grassmann, De Morgan u.a. behandelt wurden, meine Einfügung M.O.]. Die meisten dieser Arbeiten waren mir bekannt, aber ich hatte bei ihnen nicht den Eindruck, daß sie die logische Grammatik der Arithmetik in einem neuen Licht erscheinen ließen« (Russell, 1973b, 67).

Und es ist wahr, daß die Logiker der algebraischen Richtung mathematisch vorgegangen sind und daß sie die mathematischen Gesetze auf den Bereich der Logik übertragen bzw. die Logik als eine universelle Algebra verstanden haben, ohne die Methoden der Mathematik revidieren zu wollen. Die moderne axiomatische Methode repräsentiert nichts anderes als den Zielpunkt des neuzeitlichen Mathematisierungsprozesses, der seit Descartes und Leibniz zunehmend alle Phänomene und alle Wirklichkeitsbereiche ergriffen hatte und der darin mündete, daß nun schließlich auch die Mathematik selbst mathematisiert werden sollte. Insbesondere markiert der Zahlbegriff seit jeher den Kernbereich mathematischen Denkens. Und man kann sich einmal die Frage stellen, wieso erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, also mehr als 2000 Jahre nach Euklids

Axiomatisierung der Geometrie, nun auch die Arithmetik axiomatisiert werden sollte. Erst als man gegen 1870 begann, sich mit den Grundlagen der Arithmetik zu beschäftigen und nach spezifischen logischen Begründungen derselben suchte, war man auch gezwungen, sich mit den überlieferten erkenntnistheoretischen Systemen auseinanderzusetzen, denn es ist unausweichlich, daß eine derartige Selbstbezüglichkeit des Mathematisierungsprozesses dazu führt, fundamentale logische, erkenntnistheoretische und auch psychologische Probleme aufzuwerfen.

Es macht einen nicht zu unterschätzenden Reiz von Russels Untersuchung aus, daß sich die Diskussion immer in einem weiten und sehr unterschiedlich bestimmten, durch Sprachanalyse, Mathematik, Logik und Erkenntnistheorie abgesteckten Raum bewegt. Dabei fällt, was Russells Unzufriedenheit mit der bisherigen Logik und Mathematik angeht, eine Eigentümlichkeit auf.

Einerseits macht Russell uns klar, daß wir in unserer Erfassung der Naturerscheinungen nicht weiter gelangen können als bis zu einer mathematischen Darstellung der Relationen und Relationsstrukturen – das Buch der Natur ist in einer mathematischen Sprache abgefaßt, hat schon Galilei gesagt – und wir daher feststellen müssen, daß wir weit mehr über »die Form der Natur wissen als über ihren Inhalt« (65)[1]. Andererseits bemüht er sich, was die Mathematik und insbesondere den Zahlbegriff angeht, hartnäckig, »was-ist«-Fragen zu beantworten und Bedeutungen oder Interpretationen absolut festzulegen. Während er »dem unmathematischen Geist«, dem der abstrakte Charakter unserer physikalischen Erkenntnis unbefriedigend erscheinen mag, antwortet: »Von einem künstlerischen Standpunkt aus oder unter dem Gesichtspunkt der Anschaulichkeit ist diese Abstraktion vielleicht bedauerlich,

[1] Die »Einführung in die mathematische Philosophie« wird mit Nennung der Seitenzahlen ohne weitere Angaben zitiert.

aber vom Standpunkt der Praxis schadet sie nichts« (Russell, 1972, 172), hält er bezüglich der Mathematik das Gegenteil für wahr.

Gegenüber der Empirie rechtfertigt er die mathematischen Abstraktionen durch ihre Fruchtbarkeit und ihren Nutzen – »die Abstraktion, so schwierig sie auch sein mag, ist die Quelle praktischer Macht. Ein Finanzmann, dessen Verhältnis zur Welt von abstrakterer Art ist als das irgendeines Praktikers, ist auch mächtiger als irgendein Praktiker. Er kann mit Weizen und Baumwolle handeln, ohne daß er je etwas von beidem gesehen hat: alles was er davon wissen muß, besteht darin, ob ihre Preise steigen oder fallen. Das ist abstraktes mathematisches Wissen, zumindest, wenn man es mit dem Wissen des Landwirts vergleicht« (Russell, 1972, 172). Dagegen möchte er diese Abstraktionen selbst durch reines Denken konstituieren, indem er ihre Anwendbarkeit vollkommen apriorisch und in einem gleichsam Kantischen Sinne sicherstellt.

Also in allen Bereichen der Wissenschaft und des Lebens sollten wir unsere Darstellungen weitestgehend auf Zahlen und Zahlensysteme zurückführen. Aber was die Zahl selbst sei und was der Zahlbegriff bedeutet, das soll unabhängig und vor aller Anwendung durch reines Denken und logische Analyse bestimmt werden. Die Sinnesempfindungen und die Zahlen bilden seit Descartes die Grundlagen unserer Erkenntnis, so meint Russell. Indem wir nun die Bedeutung des Zahlbegriffs klären, tritt die Logik an die Stelle der Arithmetik.

Und während er glaubt, daß die Beschränkung unserer Darstellungsmöglichkeiten auf eine strukturelle Übereinstimmung zwischen der Welt und unseren mathematischen Beschreibungen derselben im Bereich der Naturwissenschaften sogar ein Vorteil sei, denn »bei der mathematischen Behandlung des Naturgeschehens können wir bei weitem sicherer sein, daß unsere Formeln annähernd richtig sind, als wir es in der Frage der Richtigkeit dieser oder jener Interpretation der Formeln sein können« (Russell, 1972, 164), möchte er die Mathematik doch nicht einfach durch ihre Struktur beschrieben sehen.

Bezüglich der Naturerkenntnis vertritt er die Einsicht, »daß mit der Zunahme unserer Fähigkeit zu logischem Denken dieses immer weniger beansprucht, es könne Tatsachen beweisen« (Russell, 1972, 164). Genau dies möchte er in bezug auf die Mathematik nicht wahrhaben. Ebensowenig wie seinen Grundsatz, daß die Logik uns eher lehre, »wie man Schlüsse nicht zieht«, anstatt »wie man zu denken habe«. Auch dieser Grundsatz gilt für ihn nicht mehr, wenn es darum geht, die Grundlagen der Arithmetik zu analysieren und darzustellen.

III.

Russell beginnt sein Werk mit einem Kapitel zur »Folge der natürlichen Zahlen«, in welchem dieselben auf der Grundlage der Peano-Axiome eingeführt werden, und hier spielt überhaupt nur der Ordinalzahlbegriff eine Rolle. Von Kardinalität, also von den Mengeneigenschaften der Zahlen, ist keine Rede.

»Die fünf Grundsätze von Peano lauten:

(1) Null ist eine Zahl.
(2) Der Nachfolger irgendeiner Zahl ist eine Zahl.
(3) Es gibt nicht zwei Zahlen mit demselben Nachfolger.
(4) Null ist nicht der Nachfolger irgendeiner Zahl.
(5) Jede Eigenschaft der Null, die auch der Nachfolger jeder Zahl mit dieser Eigenschaft besitzt, kommt allen Zahlen zu« (10).

Man könnte, so meint Russell am Ende des Kapitels, »vielleicht den Vorschlag machen«, die dabei benutzten undefinierten Begriffe »sollten nicht Begriffe darstellen, deren Bedeutung wir zwar kennen, aber nicht definieren können, sondern irgendwelche Elemente, die den fünf Axiomen Peanos genügen« (14). Dies ist die übliche Interpretation der axiomatischen Vorgehensweise. Man kann sie auch so zum Ausdruck bringen, daß man sagt, die Arithmetik handele nicht von konkret existierenden Dingen, sondern von allgemeinen oder idealen Gegenständen (vgl. dazu Abschnitt VII der Einleitung).

In der axiomatischen Grundlegung der Arithmetik »wurde vorausgesetzt, daß wir nicht zu wissen brauchen, was wir unter *Null, Zahl und Nachfolger* zu verstehen haben, sofern wir nur irgend etwas darunter verstehen, was den fünf Axiomen genügt. Aber dann zeigt es sich, daß es eine unendliche Anzahl möglicher Deutungen gibt. Es möge z. B. 0 das bedeuten, was wir gewöhnlich als 1 bezeichnen, und es möge Zahl das bedeuten, was wir für gewöhnlich als natürliche Zahl außer 0 bezeichnen. Dann sind alle fünf Axiome auch richtig, und die gesamte Arithmetik kann bewiesen werden, obwohl jede Formel eine ungewöhnliche Bedeutung hat. 2 bedeutet das, was wir gewöhnlich als 3 bezeichnen. Aber 2 + 2 bedeutet nicht etwa 3 + 3, sondern 3 + 2 … Solange wir im Gebiet der arithmetischen Formen bleiben, sind alle diese Deutungen des Begriffs Zahl gleich gut. Wenn wir aber zum praktischen Gebrauch der Zahl zur Abzählung übergehen, dann finden wir einen Grund, die eine Deutung allen anderen vorzuziehen« (Russell, 1952, 236 f.).

Aus zwei Gründen, meint Russell, kann man also auf die axiomatische Weise »nicht zu angemessenen Grundlagen der Arithmetik gelangen. Zunächst weiß man nicht, ob es irgendwelche Folgen von Elementen gibt, die Peanos fünf Axiome erfüllen [...] Zweitens sollen unsere Zahlen für das Zählen der gewöhnlichen Gegenstände brauchbar sein, und dazu müssen unsere Zahlen eine *bestimmte* Bedeutung und nicht bloß gewisse formale Eigenschaften haben. Diese bestimmte Bedeutung wird in der logischen Theorie der Arithmetik definiert« (14/15). Dort wird, wie Russell meint, die Frage »Was ist eine Zahl?«, die so oft gestellt wird, gemäß einem Vorschlag von Frege aus dem Jahre 1884 »korrekt beantwortet« (16) durch die Feststellung, daß Zahlen Eigenschaften von Mengen sind.

Durch die Fregesche Definition, die Russell, ohne sie zu kennen, nach seinem Paris-Besuch selbständig wiederentdeckt hat, »gibt es keinen Anlaß mehr, den ganzen Zahlen einen privilegierten Status zuzuschreiben [wie Kronecker das mit seinem Ausspruch getan hatte, demzufolge die ganzen Zahlen von Gott geschaffen seien, meine Einfügung, M.O.]. Diesen Platz nimmt nun zunächst der undefinierte Grundbegriff der Menge ein und«, so fährt Russell fort, »das Grundinstrumentarium des Mathematikers enthält nur noch rein logische Ausdrücke wie z. B. ›oder‹, ›nicht‹, ›alle‹ und ›einige‹« (Russell, 1973, 73).

Es geht also darum, den Zahlbegriff oder die Aussagenfunktion »x ist eine Zahl« dadurch zu rechtfertigen, daß man zeigt, daß sie nicht »leer« im Kantischen Sinne ist, d. h. dadurch, daß man »Zahl als Zahl einer Menge« (25) versteht und dem so definierten Begriff eine Anwendung durch den Aufweis der Existenz unendlicher Mengen beschafft. Dies muß offensichtlich auf axiomatischem Wege geschehen. Allerdings darf dabei der Begriff des Axioms nicht wiederum im Peano-Hilbertschen Sinne verstanden werden, sondern man muß diesen Terminus gemäß der klassischen euklidischen Tradition auffassen, nämlich als anschaulich evidente oder intuitiv plausible Voraussetzung der Mathematik. Russell führt daher ein Unendlichkeitsaxiom ein. Unendliche Mengen beliebiger Kardinalität, so nimmt er an, existieren in der Welt und stehen also unserem Denken zur Verfügung. Die Mengenlehre darf hier eigentlich nicht als bloß formale Theorie verstanden werden, sondern muß als Abbild realer Verhältnisse gesehen werden. Arithmetische Intuition wird durch mengentheoretische Anschauung ersetzt. Beides ist letztlich verschwistert, insofern ein seit Bolzano verbreitetes Ideal begrifflichen Denkens dahintersteht.

Es ist instruktiv, Russells Anliegen mit demjenigen, das einer seiner Schüler – Rudolf Carnap – formuliert hat, zu vergleichen. Carnap bezeichnet es als ein Ziel seines Werkes »Der logische Aufbau der Welt«, ein »erkenntnismäßig-logisches System« von Begriffen und Gegenständen aufzustellen, welches es erlaubt, alle Begriffe »aus gewissen Grundbegriffen stufenweise« abzuleiten oder zu »konstituieren«, »so daß sich ein Stammbaum der Begriffe ergibt, in dem jeder Begriff einen bestimmten Platz findet« (Carnap, 1928/1998). Anders als Carnap und als der logische Positivismus überhaupt geht es Russell bei seiner Wirklichkeitsanalyse allerdings nicht nur um strukturelle Beschreibungen der Welt, sondern in seine logische Analyse mischt sich stets die Vorstellung eines absoluten Wahrheits- oder Bedeutungsbegriffes. Dieses Anliegen verleiht der Interpretation oder Deutung der deduktiven Systeme ein gewisses Gewicht, und in diesem Zusammenhang kommt dem Beispiel der Interpretation der axiomatisierten Arithmetik eine hervorragende Rolle zu. Der Mengenbegriff dient nun der »Verknüpfung der Arithmetik mit der reinen Logik« und damit der Interpretation (Russell, 1929, 4).

Russell ist sich darüber im klaren, daß sein Verständnis von Theorie, Anwendung und Wahrheit nicht »beweisbar« ist und daß es eine Sache »des individuellen Geschmacks zu sein [scheint], ob man das, was man die realistische Hypothese nennen kann, annimmt oder ablehnt« (Russell, 1929, 10). Er für seinen Teil ist an der Bedeutung des Wortes »Wahrheit« interessiert und bindet dieses Interesse an die Frage, ob es »Elemente oder aus solchen aufgebaute logische Konstruktionen« gibt, die die in einem vorgegebenen Axiomensystem gestellten Bedingungen erfüllen (ebd., 9). In diesem Sinn beschäftigt er sich mit den Zahlen und ihrer logischen Konstitution, in deren Zusammenhang dem Mengenbegriff fundamentale Bedeutsamkeit zukommt, denn anders als heute üblich, gehört für Russell die Mengentheorie zur Logik.

Wenn man den Ursprung der Axiomatisierung, wie oben angedeutet, in der Mathematisierung sieht und Hilberts Überzeugung folgt, derzufolge »alles was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik« (Hilbert, 1964, 11) verfällt, dann erscheint Russells Anliegen vollkommen konsequent. Denn die Arithmetik muß, um axiomatisiert werden zu können, überhaupt als ein spezifischer Gegenstandsbereich gefaßt werden. Die axiomatisierte Theorie liefert ebensowenig wie die Naturgesetze allein keine realen Erkenntnisse. Erst die Anwendung oder Interpretation der Axiome bzw. der Naturgesetze ergibt Erkenntnisse im eigentlichen Sinn. Die undefinierten Terme, die in den axiomatischen Charakterisierungen auftreten, beziehen sich nicht auf bestimmte einzelne Gegenstände, sondern dienen dazu, mögliche Zusammenhänge zwischen unbestimmten allgemeinen Gegenständen darzustellen.

Da aber der Gegenstandsbereich der Arithmetik nicht endlich ist, hat die Mehrzahl der Mathematiker immer wieder versucht, sich der Existenz unendlicher Mengen mit erkenntnistheoretischen und nicht mit ontologischen Argumenten zu versichern. Wollten wir beispielsweise derartige Mengen konstruktiv erzeugen, so müßten wir die unendliche Wiederholbarkeit der dafür benötigten Operationen, z. B. der Operation des Weiterzählens, postulieren. Dedekind und auch andere haben sich eine unendliche Gesamtheit von Dingen dadurch zu verschaffen versucht, daß sie uns menschlichen Subjekten die Fähigkeit zugeschrieben haben, eine bestimmte Tätigkeit, etwa das Hinzusetzen eines weiteren Striches oder die Operation des Bezeichnens, unendlich oft fortzusetzen bzw. unendlich oft zu iterieren. Bereits Bolzano hatte in seiner Schrift »Paradoxien des Unendlichen« versucht, die Unendlichkeit der »Menge der Sätze und Wahrheiten an sich« dadurch zu beweisen, daß er iterativ zu einem gegebenen Satz immer wieder das Prädikat »... ist wahr« hinzusetzte.

Zweifel an der Plausibilität derartiger Annahmen ergeben sich, wenn man nicht gewillt ist, rigoros zwischen unserer inneren mentalen Welt und der äußeren empirischen Welt zu trennen. Man könnte nämlich sonst auf genau dieselbe Art und Weise, indem man iterativ zwei parallele Segmente von 1 cm Länge unendlich fortzeichnet, das Parallelenaxiom der euklidischen Geometrie »beweisen« bzw. seine Evidenz illustrieren. Warum erscheint uns die Möglichkeit, eine unendliche Menge durchzuzählen, durchaus plausibler denn eine derartige Veranschaulichung des Parallelenaxioms der Geometrie? Warum traut man den begrifflichen Konstruktionen so viel weitergehend als den anschaulichen Vorstellungen?

Die Antwort könnte etwa so lauten: Entweder es handelt sich bei beiden Vorstellungen nur um das Bedenken einer Möglichkeit, dann gibt es keinen Unterschied. Oder das eine, das Zählen, ist etwas Mentales und unterliegt keinen bzw. rein logischen Beschränkungen, während das andere, die geometrische Konstruktion, objektiven Bedingungen folgt. Dann müßten nichtsdestoweniger erst die Bedingungen für beide Formen der Kontrolle analysiert werden. Kurz, es läßt sich so ohne weiteres überhaupt kein Existenzbeweis führen.

Russell meint denn auch, durch bloßes Abzählen komme man nie zu unendlichen Gesamtheiten, und er hält es für eine empirische Tatsache, »that the mind is not capable of endlessly repeating the same act«. Auch der Leser, meint Russell, ist, »wenn er einen robusten Wirklichkeitssinn hat, gefühlsmäßig überzeugt, daß es unmöglich ist, aus einer endlichen Menge von Individuen eine unendliche Menge herauszuquetschen« (152). Wir können die Existenz von unendlichen Zahlen und Mengen nicht beweisen. Dies ist heute die wohl einhellige Meinung, aber die Begründungen, die dafür gegeben werden, sind sehr unterschiedlich und kontrovers. Russells diesbezügliche Kritik an Bolzanos bzw. Dedekinds Überlegungen betrifft über das Gesagte hinaus die für Logik und Erkenntnistheorie gleichermaßen bedeutsame Beziehung zwischen Objekt und Begriff, und man müßte fortfahren, zwischen dem Begriff und dem Begriff des Begriffs usf. Einerseits muß man nämlich postulieren, daß Begriff und Gegenstand verschieden, ja von unterschiedlichem logischen Typus sind, d. h. unterschiedlichen kategorialen Ebenen angehören. Andererseits tritt der Begriff eines Objektes im nächsten Schritt der Iteration als Objekt eines Begriffs zweiter Stufe auf, und auch hier muß Verschiedenheit statthaben. Da es sich bei den dabei notwendigen Annahmen keineswegs um logische Axiome handelt, sind die Verhältnisse ganz unübersichtlich. Weiter betont Russell, »daß Begriffe keine tatsächliche Existenz im gewöhnlichen Sinne besitzen« (157) und somit auch nicht wie Dinge behandelt werden können.

Russells Einwand besagt im wesentlichen, daß man auf besagte Art und Weise entweder zum Platonismus oder zum Psychologismus geführt wird. Denn entweder haben wir zu beweisen bzw. anzunehmen, daß es so etwas wie Begriffe an sich oder Urteile an sich gibt, oder wir verbleiben im Empirischen und müssen dann feststellen, »daß es überhaupt keine bestimmte psychologische Wesenheit gibt, welche man d e n Begriff des Objektes nennen könnte: Es gibt unzählige Meinungen und Einstellungen und wir können jede e i n e n Begriff des Objekts nennen« (158).

Schließlich lehnt Russell auch alle anderen Versuche, die Existenz einer unendlichen Menge zu beweisen, deshalb ab, weil sie den Erfordernissen seiner Typentheorie nicht entsprechen.

IV.

Was ist damit gemeint? Um bestimmte Paradoxa der Logik und der Mengentheorie zu beheben, hatte Russell die Regel eingeführt: »Was immer alle Elemente einer Menge involviert, kann kein Element dieser Menge sein. Oder umgekehrt: Wenn eine Menge, die eine Gesamtheit darstellt, Elemente besitzt, die nur mit Hilfe dieser Gesamtheit definierbar sind, dann stellt die besagte Menge keine Gesamtheit dar.« (Russell, 1976, 26) Ein auf eine Gesamtheit bezogener All-Begriff kann nicht zu der Gesamtheit gehören. Nun hatte Dedekind in »Was sind und was sollen die Zahlen?« (vgl. Dedekind, 1969, 14) den Beweis für die Existenz unendlicher Mengen auf die antinomische Menge (aller

Dinge), »welche Gegenstand meines Denkens sein können« gegründet. Dedekind ist durch Cantor bereits 1899 auf die Inkonsistenz seiner Begriffsbildung hingewiesen worden.

Schon die klassischen Paradoxien der Bewegung des Zenon entstehen eigentlich aus einem Bemühen, Begriffe höheren logischen Typs, wie den Begriff der Bewegung (der mathematischen Funktion), auf solche eines niedrigeren Typus zu reduzieren (vgl. dazu auch Russell, 1970). Obwohl eigentlich nicht das Prinzip an sich, sondern eher seine zu starre, reifizierende Interpretation problematisch ist, bezeichnet Russell selbst es als von nur negativer Art, als Verbotsprinzip. Insbesondere – und darauf werden wir zurückkommen – werden bestimmte Verbote bezüglich der Laufbereiche der quantifizierten Variablen in Satzfunktionen ausgesprochen. Ein Ausdruck »alle Aussagen sind entweder wahr oder falsch« ist beispielsweise nunmehr sinnlos (Russell, a. a. O., 27).

Des weiteren ergibt sich, daß mathematische Axiome genau wie Naturgesetze, nämlich als hypothetisch konditionale Aussagen verstanden werden müssen; etwas, was Russell im Gegensatz zu anderen Logikern zu akzeptieren scheint, auch wenn er dabei immer wieder schwankt (vgl. Gödel, 1944, 127). Russells realistische Auffassung der Logik kommt beispielsweise in der Behauptung zum Ausdruck, daß sich die Logik »gerade so gut mit der realen Welt [befaßt] wie die Zoologie, wenn auch mit ihren abstrakteren und allgemeineren Eigenschaften. Es ist eine jammervolle und armselige Ausrede, wenn man sagt, daß das Einhorn in der Wappenkunde oder in der Literatur oder in der Phantasie vorkommt. In der Wappenkunde gibt es kein Tier aus Fleisch und Blut, das aus eigener Kraft atmet und sich bewegt. Es gibt nur eine Abbildung oder eine Beschreibung in Worten [...] Es gibt nur eine Welt, die ›wirkliche‹ Welt.« (189) Und schließlich: »Der Sinn für Wirklichkeit ist für die Logik eine Lebensfrage« (190). Russell möchte sicherstellen, daß auch die mathematischen (bzw. die logischen) Begriffe wie die empirischen abstraktiv gewonnen werden – und daher seine Annahme der Existenz unendlicher Mengen.

Russell akzeptiert – und das ist bei einem Empiristen seiner Couleur durchaus erstaunlich – die Realität von Gedanken und Gefühlen (ebd.), hält aber die »Gegenstände«, mit denen sich unsere Gedanken und Gefühle beschäftigen, für weitgehend unwirklich (»Einhorn ist eine unbestimmte Beschreibung, die nichts beschreibt; nicht aber eine unbestimmte Beschreibung, die etwas Unwirkliches beschreibt« (191)).

Eine solche Auffassung ist – genauso wie die gegenteilige – jedoch mit einer Fülle von Unklarheiten behaftet. Insbesondere stellt sich angesichts der Realitätsmächtigkeit der mathematischen Theorien die Frage, welchen ontologischen Status mathematische, d. h. ideale Gegenstände denn nun besitzen. Das vorliegende Buch ist deshalb so interessant, weil es uns unmittelbaren Einblick in Russells Auseinandersetzung mit diesen und ähnlichen Fragen gewährt. Man kann sagen, alles was wir im folgenden erörtern werden, wird in irgendeiner Weise von dieser Problematik der Unterscheidung zwischen Ding und Begriff, Element und Menge, Einzelnem und Allgemeinen, Existenz und Fiktion »überschattet« sein.

Auf der einen Seite sind typentheoretische Unterscheidungen für uns ganz selbstverständlich. Die Gesamtheit der Stühle ist kein Stuhl und die Gesamtheit der roten Dinge ist kein rotes Ding, sondern eine hypostatische Abstraktion wie Röte oder eine Satzfunktion wie »x ist rot« oder eine Klasse oder was auch immer. Begriff und Gegenstand, Speisekarte und Menü oder Landkarte und Landschaft sind einerseits sicherlich zu unterscheiden, aber zum anderen ist dieser Unterschied aus der Perspektive der Erkenntnistätigkeit und ihrer Dynamik heraus auch höchst relativ. Die Unterstellung einer festen Grenze zwischen Erscheinung und Wesen oder Repräsentation und Gegenstand ist in erkenntnistheoretischer Hinsicht problematisch, weil als Motiv und Gegenstand der Erkenntnistätigkeit, verstanden als einfacher dynamischer Prozess, nur das auftreten kann, was irgendwie erscheint. Die Landkarte oder das mathematische Modell können genausogut zum Gegenstand der Erkenntnis werden, wie sie vorher ein Mittel zum Studium eines anderen Gegenstandes waren. Ein Objekt tritt in unser Denken in der Regel nur vermöge einer oder einiger Eigenschaften ein, die wir im Augenblick als wesentlich ansehen und mit welchen wir dieses Ding dann für den gegenwärtigen Belang identifizieren.

Gerade die Mathematik der Neuzeit zeichnet sich dadurch aus, daß der Prozeß der Abstraktion und Hypostasierung unendlich rekursiv fortgesetzt wird, und in der Informatik erscheint die Anzahl der semantischen Ebenen gegenüber der Mathematik noch einmal erheblich gesteigert. D. h. es ist die Komplexität der Sprache, der »Landkarte« selbst, welche zu Problemen führt. Das Projekt einer universalen und kontextunabhängigen Beschreibung der Welt scheitert schon an der unvermeidlichen Komplexität der Beschreibung selbst: daher die Beschränkungen der Typentheorie. Die Typentheorie berührt dasselbe Problem der Kontextualisierung und Interpretation, welches Russells Einwände gegen die moderne Axiomatik stimuliert hatte.

Würde man die Typentheorie in einem absoluten oder »ontologischen« Sinn auffassen, so wären schon die natürlichen Zahlen selbst alle von unterschiedlichem Typus, jedenfalls entsprechend der mengentheoretischen Interpretation, die Russell selbst von ihnen gegeben hat. Die arithmetische Tätigkeit lebt davon, daß sie alle von einer Gattung sind und daß dieses Faktum etwa in der Axiomatik oder im Gebrauch der algebraischen Variablen auch zum Tragen kommt. Russell versucht, dieser Notwendigkeit später auch durch die Einführung weiterer logischer Axiome gerecht zu werden.

Die Variablenauffassung ist nun tatsächlich hier von großer Bedeutung. Ist die Variable nur ein Stellvertreter für die einzelnen Zahlen und sind daher Aussagen, in denen sie vorkommt, im Sinne einer unendlichen logischen Konjunktion, die noch dazu über eine unendliche Stufenleiter unterschiedlicher Typen liefe, zu interpretieren, oder haben universale bzw. ideale Gegenstände, wie sie durch Begriffe wie Zahl oder Funktion oder Relation bezeichnet werden, ein (relativ) unabhängiges, eigenständiges Sein? Beide Auffassungen koexistieren in der Mathematik. Der Unterschied zwischen der Behauptung über eine allgemeine Zahl und der Behauptung über alle Zahlen muß, wie selbst Russell zugibt, in die Mathematik eingeführt werden, weil »eine Deduktion nur mit freien, nicht mit gebundenen Variablen durchgeführt werden kann« (Russell, 1976, 29). Ich muß nämlich im gesamten Argumentationszusammenhang immer auf dasselbe allgemeine Objekt referieren können.

Und auch die Naturgesetze sind nicht sinnvoll als unendliche Konjunktion zu verstehen, etwa nach dem Muster, »der Stein *a* fällt«, und »der Stein *b* fällt«, und »der Stein *c* fällt« usw. usf. Der Anwendungsbereich der Naturgesetze muß in einem bestimmten Sinn offen bleiben, und er entwickelt sich zusammen mit der Entwicklung der Theorie. Aber andererseits kann er nicht vollständig unbestimmt bleiben, denn die Naturgesetze allein geben gar keine Erkenntnis. Russells Bemühungen, den Zahlen eine endgültige Bedeutung zu verleihen, zeigen somit, daß Entwicklung und Anwendung oder Begründung der Theorie in sehr komplizierter Art und Weise miteinander verflochten sind. Russell würde es durchaus als ein legitimes Anliegen sehen, Bedeutung und Offenheit zu verbinden. Arithmetik und Mathematik insgesamt hätten sich jedoch in einen logischen Entwicklungszusammenhang einzuordnen. Weder die Gegenstände des Alltagsdenkens noch die Begriffe der Mathematik können der Welt unmittelbar zugeschrieben werden, denn beide sind das Ergebnis komplizierter Konstitutionsprozesse. Diese sollten analysiert und dargestellt werden.

Theorien können immer nur Strukturaussagen machen. Theoretische Gegenstände sind nur bis auf die Struktur ihrer Beziehungen bestimmbar. »Struktur aber ist, was durch mathematische Logik ausgedrückt werden kann« (Russell, 1929, 267). In diesem Zusammenhang spricht Russell auch von einer Überschätzung der Zahl. »Nun hat die mathematische Logik gezeigt, daß die Zahl für viele Probleme entbehrlich ist, für die sie früher als unentbehrlich galt.« (ebd., 73) Durch einen Verzicht auf die Zahl erreicht man einen »Gewinn an logischer Reinheit«. Und so merkwürdig es klingen mag, diese logische Reinheit zeigt uns dann auch den Sinn des Wahrheitsbegriffs in den Wissenschaften, indem sie uns zu den ursprünglichen Axiomen im traditionellen Sinn führt. Hier nun steht das Unendlichkeitsaxiom an hervorragender Stelle. In ihm enthüllt sich Russells wirkliches Interesse, jedenfalls sofern es um Fragen der Wahrheit und der Existenz geht.

Russell scheint tatsächlich davon auszugehen, daß das Axiom des Unendlichen ontologischer Natur sei und daß es plausibler sei, die Existenz unendlicher Gesamtheiten in der Welt anzunehmen als die gegenteilige finitistische Hypothese, auch wenn eine solche Annahme nicht bewiesen werden kann. Es handelt sich dabei eben um ein Axiom im klassischen Sinne. Entsprechend unserer »empirischen Evidenz und der Teilbarkeit endlicher Objekte scheint es günstig zu sein anzunehmen, daß es im Universum eine unendliche Anzahl von Objekten gibt«, aber wir können a priori nichts darüber wissen, und »es scheint keine Methode zu geben, festzustellen, ob das Axiom wahr oder falsch ist« (161). Daß Russell nicht auf den Gedanken verfällt, demzufolge die beliebige Teilbarkeit doch eigentlich nichts anderes bedeutet als Dedekinds Postulat der unendlichen Iterierbarkeit ein und derselben Operation, hängt damit zusammen, daß nur eine abstraktive Begriffstheorie die Anwendbarkeit der so gewonnen Begriffe unmittelbar plausibel macht.

Russell hält die Existenz des Aktual-Unendlichen an sich für anschaulich, plausibel und notwendig, eine Auffassung, der Hilbert vehement widersprochen hat. Und Peanos Axiome in ihrer Gesamtheit implizieren die Existenz des Aktual-Unendlichen. D. h., so meint Russell, sie sollten als Existenzbehauptung gelesen und aufgefaßt werden. Dann ist aber ihr Gehalt in einer logisch noch einfacheren Form wiederzugeben. Dazu dient das Unendlichkeitsaxiom.

V.

Es drängt sich hier ein Vergleich mit Kant auf, und zwar ungeachtet Kants konstruktiv-genetischer Mathematikauffassung. Kant ist wohl der erste gewesen, der mit Nachdruck die Relativität aller menschlichen Erkenntnis hervorgehoben hat. Niemals besitzen wir einen direkten, unvermittelten Zugang zu den Dingen an sich. Kant beginnt entsprechend mit einer Kritik des klassischen Ontologismus. Er fragt nicht, was Erkenntnis oder die Welt an sich seien oder ob es so etwas überhaupt gibt, sondern er geht von dem Faktum der mathematischen und wissenschaftlichen Erkenntnis aus und fragt, wie sie möglich ist. Wie ist reine Mathematik möglich? Wie ist reine Naturwissenschaft möglich?

Aber Kant stellt diese Fragen nicht in skeptischer Absicht. Denn er geht, wie gesagt, von dem Faktum der reinen Mathematik aus. Dieses Faktum zeigt sich in der Anwendung bzw. in der Anwendbarkeit der Mathematik. Es geht also nicht darum zu erklären, worin die Logik der Mathematik besteht, und Kants Rekurs auf die (reine) Anschauung ist auch nicht als eine kompensatorische Maßnahme zu verstehen, die die Defizite der aristotelischen Syllogistik ausgleichen soll, wie Russell anzunehmen scheint (163; vergleiche dazu auch Koriako, 1999, 19), sondern es geht um Subjektbezug und Gegenständlichkeit der Mathematik und um den legislativen Charakter der reinen Anschauung im Anwendungsprozeß.

Kant stellt bekanntlich die Frage, wie es möglich sein kann, daß die unbedingt notwendigen Konklusionen der Mathematik zu realen Erkenntnissen führen. Und er beantwortet diese Frage, indem er, eigentlich Russell sehr ähnlich, die Bedingungen der Anwendungen mathematischer Begriffe und Urteile *a priori* und grundsätzlich bestimmen möchte. Diese Anwendungsbedingung lokalisiert Kant in Anschauung und Erfahrung, da wir ja in jedem Fall »über den Begriff hinausgehen« müssen, wollten wir nicht Leibniz' Gottesaugen-Standpunkt einnehmen, demzufolge auch Begriffe mit unendlich vielen definitorischen Bestimmungen denkbar sind. Durch bloßes begriffliches Nachdenken können wir keinerlei Erkenntnis gewinnen. Es gibt keinen direkten Weg von der Sprache zur Welt. Erkenntnis bedarf immer der Anwendung.

Hier haben wir nun nach Kant in einem gleichsam Russells Typentheorie vorwegnehmenden Sinne zu unterscheiden zwischen der allgemeinen Bedingung der Anwendbarkeit des Begriffs und der Anwendung selbst, zwischen dem Begriff der Erfahrung einerseits und den einzelnen Erfahrungen andererseits. Die allgemeinen Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung, beziehungsweise der Anwendung des Begriffs, sind a priori zu bestimmen, ganz im Sinn des Russellschen Vorhabens, und diese Erklärungen a priori beziehen sich auf die Bedingungen, die Gegenstände möglicher Erfahrungen zu erfüllen haben. Eine Erkenntnistheorie aus der Perspektive des endlichen menschlichen Subjekts zwingt uns, auch ontologische Fragen erkenntnistheoretisch zu definieren, und Kant bestimmt daher die Realität und Gegenständlichkeit der Erkenntnis aus ihren Entstehensbedingungen, nicht aufgrund ontologischer oder metaphysischer Annahmen. Wir gewinnen aber unsere Erkenntnisse durch die Anschauung, auch wenn wir die Anschauung nicht im Sinne des Empirismus mit der Wahrnehmung bloß einzelner Sinnesdaten gleichsetzen dürfen, denn Hume hat uns gelehrt, daß der induktive Schluß vom Einzelnen auf das Allgemeine nicht möglich ist, sondern es bedarf dafür regulativer (nicht konstitutiver) Prinzipien der Erfahrung a priori.

Auch Ernst Cassirer vergleicht Kants Auffassungen mit denen von Russell und schreibt in diesem Zusammenhang u.a. folgendes: »Daß unsere Begriffe sich auf Anschauungen zu beziehen haben, bedeutet, daß sie sich auf die mathematische Physik zu beziehen und in ihrer Gestaltung fruchtbar zu erweisen haben. Die logischen und mathematischen Begriffe sollen nicht länger die Werkzeuge bilden, mit denen wir eine metaphysische Gedankenwelt aufbauen: Sie haben ihre Funktion und ihre berechtigte Anwendung lediglich innerhalb der Erfahrungswissenschaft selbst. Diese ihre Begrenzung ist es, die ihnen ihre Realität sichert. In diesem Sinne hat Kant den ›obersten Grundsatz aller synthetischen Urteile‹ formuliert: ›Die Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung überhaupt sind zugleich Bedingungen der Möglichkeit der Gegenstände der Erfahrung und haben darum objective Gültigkeit in einem synthetischen Urtheile a priori‹ (B 197)« (Cassirer, 1907, 43).

Letztendlich dient Russells Grundlegung des Zahlbegriffs genau demselben Anliegen. Schließlich ist daran zu erinnern, daß Russell bereits 1912 in seinen »Problems of Philosophy« ein fundamentales epistemologisches Prinzip formuliert hat, das stark an Kants Betonung der Unverzichtbarkeit der Anschauung erinnert. Es heißt dort: »Das Grundprinzip für die Analyse von Sätzen, in denen Beschreibungen vorkommen, lautet also: Jeder Satz, den wir verstehen können, muß vollständig aus Bestandteilen zusammengesetzt sein, die uns bekannt sind.« *Bekanntschaft* (acquaintance) ist hier im Gegensatz zu *Beschreibung* zu verstehen (Russell, 1967, 53).

Nur vertritt Russell, anders als Kant, eine abstraktive und keine konstruktive Theorie des Begriffs, so daß an die Stelle der Formen der reinen Anschauung jetzt das Axiom der Unendlichkeit tritt, d. h. die Annahme, daß die Welt aus unendlichen Mengen und Mengen von Mengen usw. besteht und die mathematischen Begriffe wie die empirischen abstraktiv konstituiert werden können. Wie Kant möchte Russell *a priori* die Anwendbarkeit der mathematischen Begriffe und Urteile bestimmen, auch wenn er dabei im Gegensatz zu Kant nicht konstruktiv-genetisch an die Mathematik herangeht, sondern aus abstraktiver und logischer Perspektive.

Und sosehr Russell auch immer wieder Kant kritisiert, weil derselbe einen zu starken Gebrauch von der Anschauung macht und zu wenig in die Logik und die logische Analyse eintritt, so treffend kann man andererseits, wie oft geschehen, Russells Philosophie durch die Formulierung »von Kant und zu Kant zurück« kennzeichnen. Ist nicht schließlich die Idee der Menge in der Russell-Cantorschen Mathematikauffassung nur das Substitut für den Raum? Sind nicht sogar die mengentheoretischen Modelle, die die axiomatische Mathematik ergänzen, in einer ähnlichen Weise zu verstehen, wie die geometrische Anschauung in ihrem Verhältnis zu Euklids Axiomatik zu verstehen war? Ist das Unendliche nicht nur ein Wort, welches wir operativ durch die Annahme bestimmter Gesetzmäßigkeiten mit mathematischer Bedeutung füllen?

Insbesondere Peanos fünftes Axiom, das Axiom der vollständigen Induktion, gehört nicht der Logik im eigentlichen Sinne an (Prädikatenlogik erster Stufe) und läßt sich auch nicht (was Thoralf Skolem erst 1934 bewiesen hat) durch logische Axiome ersetzen (selbst durch unendlich viele nicht). Bereits um 1900 hatten Mathematiker, wie Poincaré beispielsweise, dieses Axiom als Hinweis auf den synthetischen Charakter der Arithmetik im Sinne Kants gedeutet. Russell betrachtet Poincarés Ansichten als Irrtum, denn »die mathematische Induktion ist eine Definition und kein Prinzip. Es gibt gewisse Zahlen, für die sie gilt, und andere […] für die sie nicht gilt. Wir *definieren* die ›natürlichen Zahlen‹ als diejenigen, auf die man die mathematische Induktion bei Beweisen anwenden kann, d. h. als diejenigen die alle induktiven Eigenschaften besitzen«

(34). Diese Definition hängt aber von der Begründung des Zahlbegriffs durch den der Menge und damit vom Axiom des Unendlichen und von anderen »umstrittenen« Annahmen wie dem Auswahlaxiom ab, welches Russell selbst »für unbeweisbar« hält (132) (vgl. dazu auch Heinzmann, 1995). Aber es ist interessant, Russell gegenüber Poincaré selbst wiederum den axiomatischen Standpunkt einnehmen zu sehen.

VI.

Wir wissen zwar nun, daß der Begriff »Zahl« nicht »leer« ist, um es in Kantischer Manier auszudrücken, weil es endliche und unendliche Mengen gibt, auf die er anwendbar ist, aber wir kennen seine konkrete Bedeutung, seinen Inhalt noch nicht. Abgesehen davon, daß wir davon auszugehen haben, er sei ein Begriff der Mengenlehre im allgemeinen Sinn. Es ist eine Sache, die Existenz der unendlichen Mengen zu postulieren, und eine andere, eine Korrespondenz zwischen Zahlen und Mengen zu etablieren. Wir haben diese Korrespondenz insbesondere so zu konkretisieren, daß die damit gegebenen Entitäten Peanos fünf Axiome erfüllen. Dazu konstruiert Russell ein entsprechendes mengentheoretisches Modell, auf dessen Einzelheiten in dieser Einleitung nicht eingegangen werden muß.

»Die Bekanntschaft mit Universalien wird als Begreifen bezeichnet, und ein Universales, mit dem wir bekannt sind, als Begriff. Wir nehmen nicht nur individuelle Gelbtöne wahr, sondern auch das universelle Gelb, wenn wir nur hinreichend viele Gelbtöne gesehen haben und intelligent genug sind. Dieses Universale ist das Subjekt in Urteilen wie ›Gelb ist von Blau verschieden‹« (Russell, 1976, 68). Worin unterscheidet sich aber dann die Bekanntschaft mit einer Universalie wie ›Rot‹ von der mit einer wie ›Drei‹? Vom logischen Standpunkt überhaupt nicht.

Russell stellt fest: ›Zahl‹ ist das Eigentümliche an den Zahlen wie ›Mensch‹ das Eigentümliche an den Menschen