

Vogel Studienmodule

Helmut Roderer
Alfred Pecher

Digitale Signalverarbeitung

 **VOGEL**

mit CD-ROM

Helmut Roderer / Alfred Pecher

Digitale Signalverarbeitung

Eine Einführung
mit Demonstrationsbeispielen
und Programm-CD

Vogel Buchverlag

Professor Dipl.Ing. HELMUT RODERER, geboren 1936 in Würzburg, studierte Regelungstechnik und technische Elektronik an der Technischen Universität Darmstadt. Ab 1964 arbeitete er in der Industrie, hauptsächlich bei der Dornier AG. Seit 1973 lehrt er an der Hochschule für angewandte Wissenschaften, Fachhochschule Würzburg-Schweinfurt, das Fach Prozessdatenverarbeitung im Studiengang Informationstechnik.

Dr.-Ing. ALFRED PECHER, geboren 1964 in Reutlingen, studierte Informationstechnik an der Fachhochschule Würzburg-Schweinfurt und Allgemeine Elektrotechnik an der Friedrich Alexander Universität Erlangen. Er promovierte neben seiner beruflichen Tätigkeit an der Technischen Universität Ilmenau auf dem Gebiet der Signalverarbeitung im menschlichen Gehirn. Seit 2000 arbeitet er, zuletzt in leitender Funktion, bei der Schaeffler KG in Herzogenaurach und gibt nebenher Vorlesungen in seinem Fachgebiet der Signal- und Systemtheorie.

MATLAB und Simulink sind eingetragene Warenzeichen der Firma The MathWorks Inc.

Weitere Informationen:
www.vogel-buchverlag.de

ISBN 978-3-8343-3115-1

1. Auflage. 2010

Alle Rechte, auch der Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden. Hiervon sind die in §§53, 54 UrhG ausdrücklich genannten Ausnahmefälle nicht berührt.

Printed in Germany

Copyright 2010 by Vogel Business Media GmbH & Co. KG, Würzburg

Vorwort

Dieses Werk entstand aus Vorlesungen an der Hochschule für angewandte Wissenschaften, Fachhochschule Würzburg-Schweinfurt, zum Fachgebiet Prozessdatenverarbeitung.

In diesem Fachbuch wird hauptsächlich auf die Theorie determinierter Signale eingegangen. Aber auch die wesentlichen Eigenschaften stochastischer Signale und ihre technische Generierung werden besprochen.

Zusätzlich findet neben der Signaltheorie und deren Verarbeitung die Beschreibung und der Entwurf von Systemen ausführlichen Raum.

Gemäß ihrer praktischen Relevanz stehen dabei die zeitdiskreten Signale und Systeme im Vordergrund. Ihre zeitkontinuierlichen Entsprechungen werden nur insoweit behandelt, wie sie für das Verständnis und den Entwurf der zeitdiskreten Signale und Systeme benötigt werden.

Gängige Verfahren wie beispielsweise die Laplace- und die Fouriertransformation sind für beide Signalklassen genauso enthalten wie die Klassifizierung zeitdiskreter Signale und Systeme. Der Entwurf spezieller Systeme wie Filter, Integrations- und Differentiationsalgorithmen sowie Hilberttransformatoren ist anschaulich dargestellt.

Dem Interessenskonflikt zwischen Lehrer und Student, nämlich dem Wunsch nach theoretischer Vollständigkeit und Klarheit einerseits und nach möglichst raschem Zugang zu praktikablen Lösungen andererseits wird diesem Fachbuch dadurch Rechnung getragen, dass möglichst jedem theoretisch orientierten Kapitel Demonstrationsbeispiele in *Matlab* zugeordnet sind. Diese Beispiele finden sich auf der beigefügten CD. So kann jeder Student entweder auf der eigenen PC-Installation oder im Rechnerpool seiner Hochschule die besprochenen theoretischen Grundlagen unmittelbar erproben.

Eine so umfangreiche Zusammenstellung der wichtigsten Zusammenhänge aus der Signal- und Systemtheorie lässt sich nur mit der Unterstützung und mit der guten Zusammenarbeit eines erfahrenen Verlages umsetzen, wofür wir uns herzlich bedanken.

Helmut Roderer, Alfred Pecher

Inhaltsverzeichnis

1	Signale	1
1.1	Einführung	1
1.2	Klassifizierung von Signalen	2
1.3	Grundoperationen an Signalen	4
1.3.1	Spiegelung und Verschiebung von Signalen	4
1.3.2	Zerlegung von Signalen	5
1.4	Zeitdiskrete determinierte Signale	6
1.4.1	Zahlenfolge	6
1.4.2	Zeitreihe	7
1.4.3	Zeitdiskretes Signal	8
1.4.3.1	Deltafunktion	9
1.4.3.2	Darstellung von Zeitreihen durch zeitdiskrete Signale	10
1.4.3.3	Deltaabtastung von zeitkontinuierlichen Signalen .	11
1.5	Stochastische zeitdiskrete Signale	12
1.5.1	Beschreibung von Zufallssignalen	14
1.5.2	Elementarereignis	14
1.5.3	Vektorielle Zufallssignale	14
1.5.4	Verteilungsfunktion und Dichtefunktion	15
1.5.5	Erwartungswerte	17
1.6	Physikalische Darstellung eines zeitdiskreten Signals	19
1.7	Verarbeitung von Zeitreihen	19
1.8	Faltung	20

1.8.1	Definition und Eigenschaften der Faltung	20
1.8.2	Grafische Interpretation der Faltung	21
1.8.3	Faltung mit Distributionen	22
1.8.4	Diskrete Faltung	23
1.8.5	Faltung zeitkontinuierlicher zeitbegrenzter Signale	24
1.8.6	Zyklische diskrete Faltung	25
1.8.7	Diskrete Faltung und z-Transformation	26
1.8.8	Aufgaben	28
1.9	Laplace- und Z-Transformation	30
1.9.1	Laplacetransformation	30
1.9.2	Z-Transformation	31
1.9.3	Zusammenstellung von Transformationspaaren	32
2	Fouriertransformation	35
2.1	Rechenregeln der Fouriertransformation	35
2.2	Wichtige Fouriertransformationspaare	36
2.3	Fouriertransformierte kausaler Signale	36
2.4	Diskrete Fouriertransformation	38
2.5	Ermittlung der Fouriertransformierten	39
2.5.1	Fouriertransformierte zeitdiskreter Signale	39
2.5.1.1	Fouriertransformierte periodischer Signale	40
2.5.1.2	Fouriertransformierte zeitbegrenzter Signale	40
2.5.1.3	Fouriertransformierte sehr langer Signale	42
2.5.2	Fouriertransformierte zeitkontinuierlicher Signale	42
2.5.2.1	Fouriertransformierte zeitbegrenzter Signale	42
2.5.2.2	Fouriertransformierte periodischer Signale	44
2.6	Fourierreihen	44
2.7	Die Beziehung der Fouriertransformation zur Laplacetransformation	45
2.8	Parsevalsche Theoreme	45
2.8.1	Aperiodische zeitkontinuierliche Signale	45
2.8.2	Aperiodische zeitdiskrete Signale	46
2.8.3	Periodische zeitkontinuierliche Signale	47
2.8.4	Periodische zeitdiskrete Signale	48
2.9	Leckeffekt bei der DFT	49
2.10	Nichtstationäre Signale	51
2.10.1	Einführung	51
2.10.2	Kurzzeitspektren	52
2.11	Aufgaben	54

3	Approximation von Signalen	61
3.1	Einführung	61
3.2	Herleitung der Least-Square-Methode	61
3.3	Approximation und Interpolation	64
3.4	Anwendungsbeispiele	64
3.4.1	Approximation mit beliebigen Funktionen	64
3.4.2	Regressionspolynome	65
3.4.3	Interpolation	68
3.4.4	Verstärkungsmessung	68
3.5	Approximation mit orthogonalen Signalen	71
3.5.1	Diskrete Fouriertransformation	73
3.5.2	Diskrete Cosinustransformation, DCT	74
3.5.3	Approximation mit Haarfunktionen	76
4	Systeme	79
4.1	Systembeschreibung	79
4.2	Aufteilung und Zusammenfassung	80
4.3	Klassifizierung von Systemen	81
4.4	Systemsimulation	82
4.5	Mathematische Systembeschreibung	82
4.5.1	Allgemeines	82
4.5.2	Lineare und zeitinvariante Systeme	83
4.5.3	Einteilung der LTI-Systeme	85
4.6	Systembeschreibung mit Testsignalen	85
4.6.1	Gewichtsfunktion und Übertragungsfunktion	86
4.6.2	Übertragungsstabilität	88
4.6.3	Sprungantwort	88
4.6.4	Frequenzgang	89
4.6.4.1	Frequenzgang von zeitkontinuierlichen Systemen	89
4.6.4.2	Frequenzgang von zeitdiskreten Systemen	90
4.6.4.3	Messung von Frequenzgängen	91
4.6.4.4	Eigenschaften kausaler Systeme	92
4.6.4.5	Weitere Begriffe zum Frequenzgang	92
4.7	Verknüpfung von LTI-Systemen	93
4.7.1	Reihen- oder Kaskadenschaltung, Inverses System	93
4.7.2	Parallelschaltung, Komplementärsystem	94
4.7.3	Kreisschaltung	95

5	Differenzgleichungssysteme	97
5.1	Gewichtsfunktion und Sprungantwort	98
5.2	Z-Übertragungsfunktion	99
5.3	Frequenzgang	102
5.4	Übertragungsstabilität	103
5.4.1	Stabilitätskriterium im z-Bereich für Differenzgleichungssysteme	104
5.4.2	Praktische Ausführung der Stabilitätsprüfung	105
5.5	Typen zeitdiskreter Systeme	105
5.6	Aufgaben	106
6	Differentialgleichungssysteme	117
6.1	Einführung	117
6.1.1	Lineare Differentialgleichungssysteme	117
6.1.2	Nichtlineare Differentialgleichungssysteme	118
6.2	Untersuchung von Systemen im Zeitbereich	118
6.3	Anwendung der Laplacetransformation	119
6.3.1	Lösung von Differentialgleichungen mit der Laplacetransfor- mation	119
6.3.2	Laplace-Übertragungsfunktion	120
6.4	Frequenzgang	120
6.5	Sprungantwort	122
6.6	Übertragungsstabilität	123
6.7	Numerische Berechnung der Systemantwort auf beliebige Eingangs- signale	125
6.8	Aufgaben	125
7	Anregungsinvariante Approximation	129
7.1	Lösungsansatz	129
7.1.1	Impulsinvariante Approximation	130
7.1.2	Sprunginvariante Approximation	130
7.1.3	Weitere Approximationsformen	130
7.2	Übertragungsfunktion der sprunginvarianten Approximation	131
7.3	Numerische Berechnung der sprunginvarianten Approximation . . .	132
7.4	Aufgaben	133

8 Zustandsdarstellung von Systemen	141
8.1 Darstellung für zeitkontinuierliche Systeme	141
8.1.1 Ermittlung der Übertragungsfunktion	142
8.1.1.1 Übertragungsfunktion für SISO-Systeme	143
8.1.1.2 Übertragungsfunktionen für MIMO-Systeme	144
8.1.2 Ermittlung der Zustandsdarstellung aus der Übertragungsfunktion	144
8.1.2.1 Ermittlung der Regelungsnormalform	145
8.1.2.2 Ermittlung der Beobachtungsnormalform	146
8.1.2.3 Ermittlung der Jordanschen Normalform	146
8.2 Zustandsdarstellung zeitdiskreter Systeme	147
8.2.1 Ermittlung der Übertragungsfunktion	148
8.3 Diskretisierung der Zustandsdarstellung zeitkontinuierlicher Systeme	148
8.4 Matlab-Funktionen	150
8.5 Verknüpfung von Systemen	150
8.5.1 Verknüpfung zeitkontinuierlicher Systeme	150
8.5.1.1 Zusammenfassung	150
8.5.1.2 Reihenschaltung	151
8.5.1.3 Parallelschaltung	151
8.5.1.4 Kreisschaltung	151
8.5.2 Verknüpfung zeitdiskreter Systeme	151
8.6 Aufgaben	152
9 Abtastung und Rekonstruktion von Signalen	157
9.1 Abtastung	157
9.2 Rekonstruktion	159
9.2.1 Ideale Rekonstruktion	159
9.2.2 Reale Rekonstruktion	160
9.2.3 Möglichkeiten zur Verbesserung der realen Rekonstruktion .	164
9.3 Pulsamplitudenmodulation	165
9.4 Aufgaben	165

10 Spezielle zeitdiskrete Systeme	169
10.1 Phasenlineare Systeme	169
10.1.1 FIR-Systeme	169
10.1.2 IIR-Systeme	171
10.1.3 Nullstellenverteilung für phasenlineare FIR-Systeme	172
10.1.3.1 Multiplikation von Spiegel- und Antispiegelpolynomen	172
10.1.3.2 Elementare Spiegel- und Antispiegelpolynome	172
10.2 Reverse FIR-Systeme	174
10.2.1 Einführung	174
10.2.2 Definition des reversen FIR-Systems	175
10.2.3 Ausblicke	176
10.3 Allpässe und Minimalphasensysteme	176
10.3.1 Allpässe	176
10.3.2 Inverse oder Minimalphasensysteme	178
10.4 Filter	181
10.4.1 Ideale Filter	182
10.4.2 FIR-Filter	184
10.4.2.1 Ideale FIR-Tiefpässe	184
10.4.2.2 Realisierbare FIR-Tiefpässe	185
10.4.2.3 FIR-Tiefpass mit Rechteckfenster	186
10.4.2.4 FIR-Tiefpass mit Cosinusfenstern	187
10.4.2.5 FIR-Tiefpässe mit anderen Fensterfunktionen	188
10.4.2.6 FIR-Hochpässe	188
10.4.2.7 FIR-Bandpässe und FIR-Bandsperren	189
10.4.2.8 Entwurf von FIR-Filtern mit der LS-Methode	191
10.4.2.9 Weitere Entwurfsmethoden für FIR-Filter	193
10.4.3 IIR-Filter	193
10.4.3.1 Entwurfsmethode	193
10.4.3.2 Ausgleich der Phasenverzerrung bei IIR-Filtern	195
10.4.4 Aufgaben	197

10.5	Online-Integration von Signalen	201
10.5.1	Einschrittige Integrationsalgorithmen	202
10.5.2	Mehrschrittverfahren	205
10.5.2.1	Zweischrittverfahren	206
10.5.2.2	Dreischrittverfahren	206
10.5.3	Aufgaben	206
10.6	Differentiationsalgorithmen	208
10.6.1	Algorithmen aus Stützpolynomen	209
10.6.2	FIR-Differenzierer	211
10.7	Signalinterpolatoren	215
10.7.1	Offline-Interpolation	215
10.7.1.1	Konstruktion eines Interpolationspolynoms	216
10.7.1.2	Offline-Interpolation mit Intervall-Polynomen	217
10.7.1.3	Whittaker-Interpolation	219
10.7.2	Online-Interpolation	220
10.7.2.1	Lineare Interpolation	222
10.7.2.2	Filterung mit FIR-Tiefpass	223
10.7.3	Aufgaben	225
10.8	Algorithmen zur Signalglättung	228
10.8.1	Gleitender Mittelwert	229
10.8.2	Glättung mit FIR-Tiefpass	229
10.8.3	DFT-Glättung	231
10.8.4	Nichtlineare Glättungsfilter	231
10.8.4.1	Medianfilter	232
10.8.4.2	Entfernung von Ausreißern	232
10.9	Algorithmen zur Hilberttransformation	233
10.9.1	Offline-Hilberttransformation von Signalen	234
10.9.2	Online-Hilberttransformation	237
10.10	Goertzel-Algorithmus	237
10.11	Zufallszahlengeneratoren	240

10.11.1	Generator für gleichverteilte Zufallszahlen	241
10.11.2	Generatoren mit vorgebbaren Dichtefunktionen	241
10.11.2.1	Zufallszahlengenerator für Poisson-Verteilung	242
10.11.2.2	Zufallszahlen mit Binominal-Verteilung	242
10.11.2.3	Zufallszahlengenerator für Normalverteilung	243
10.11.3	Generator für Pseudo-Rausch-Binär-Signal	243
10.11.3.1	Herleitung des PRB-Signals	243
10.11.3.2	Numerische Erzeugung des PRB-Signals	247
10.11.3.3	Die z -Übertragungsfunktion des PRBS-Generators	247
10.11.4	Generator für gewichtete Binärfolgen	247
11	Einstellen von Systemen in endlicher Zeit	249
11.1	Einstellen von zeitdiskreten Systemen in endlicher Zeit	249
11.1.1	Einstellen von FIR-Systemen	249
11.1.2	Einstellen von IIR-Systemen	250
11.2	Einstellen von zeitkontinuierlichen Systemen in kürzester Zeit	251
11.3	Aufgaben	252
12	Systemidentifikation	255
12.1	Schätzung von z -Übertragungsfunktionen	255
12.1.1	Parameterermittlung im Zeitbereich	255
12.1.2	Schätzung der z -Übertragungsfunktion aus Frequenzgang	258
12.2	Frequenzanalyse bei Mehrtronsignalen	259
12.3	Rekursive Systemidentifikation	262
12.3.1	Nichtrekursiver Algorithmus	262
12.3.2	Rekursiver Algorithmus	264

13 Korrelationsfunktion und spektrale Leistungsdichte	269
13.1 Korrelationskoeffizient	269
13.2 Korrelationsfunktionen	271
13.2.1 Autokorrelationsfunktion	272
13.2.1.1 Definition und Eigenschaften	272
13.2.1.2 Interpretation	273
13.2.1.3 Autokovarianzfunktion	274
13.2.2 Kreuzkorrelationsfunktion	274
13.2.2.1 Kreuzkovarianzfunktionen	274
13.2.3 Rechenregeln für Korrelationsfunktionen	275
13.2.4 Korrelationsfunktionen periodischer zeitdiskreter Signale . .	275
13.2.5 Numerische Berechnung von Korrelationsfunktionen	275
13.3 Spektrale Leistungsdichte	278
13.3.1 Definition	278
13.3.2 Numerische Berechnung	279
13.4 Spektrale Kreuzleistungsdichte	281
13.5 Leistungsdichten und Frequenzgang	282
13.6 Weißes und farbiges Rauschen	282
13.7 Aufgaben	283
14 Systemsimulation mit Simulink	287
14.1 Einführung	287
14.2 Simulation zeitdiskreter Systeme	288
14.2.1 Sinus-Cosinus-Generator	288
14.2.2 Generator für Pseudo-Rausch-Binär-Signale (PRBS)	289
14.2.3 IIR-Algorithmus	290
14.2.4 Messung von Amplitude und Frequenz harmonischer Signale	293
14.2.5 Phasenschieber	295
14.2.6 Rekursive Parameterschätzung	297
14.3 Simulation zeitkontinuierlicher Systeme	298
14.3.1 Simulation eines Fliehkraftpendels	298
14.3.2 Simulation einer Verladebrücke	301
14.3.3 Simulation der Reibung	305
14.3.4 Simulation von Flüssigkeitsbehältern	307
14.3.5 Simulation eines Gleichstrommotors	310
14.3.6 Mathieu-Differentialgleichung	313
14.3.7 Simulationsbeispiel aus der Populationsdynamik	314

15 Digitale Regelung	317
15.1 Vorbemerkung	317
15.2 Einführung in die Regelungsaufgabe	317
15.3 Grundzüge der digitalen Regelung	318
15.4 Kompensationsregler	320
15.4.1 Aufgabenstellung	320
15.4.2 Ermittlung des Reglers	321
15.4.2.1 Auswahl des Führungsverhaltens	321
15.4.2.2 Bestimmung der Regler	321
15.4.2.3 Störverhalten	322
15.4.2.4 Numerische Implementierung	322
15.5 Regelung mit endlicher Einstellzeit	323
15.5.1 Aufgabenstellung	323
15.5.2 Ermittlung der Taktzeit	324
15.5.3 Auslegung des Reglers	325
15.5.4 Störverhalten	326
15.5.5 Simulink-Simulation	326
15.6 Zweipunktregelung	329
15.6.1 Zweipunktregler	329
15.7 Zeitoptimale Regelung von Strecken	329
15.8 Wurzelortskurve	334
15.9 Aufgaben	335
16 Ermittlung von Signalparametern aus Messwerten	339
16.1 Minimierung von Funktionen	339
16.1.1 Lösungsansätze	340
16.1.2 Simplexmethode zur Funktionsminimierung	340
16.2 Ermittlung von Signalparametern	343

17 Anhang 1: Darstellungen von Differenzgleichungssystemen	345
17.1 Kanonische Darstellungen	345
17.1.1 Erste kanonische Form	345
17.1.2 Zweite kanonische Form	346
17.1.3 Kaskadenform	347
17.2 Parallelform	348
18 Anhang 2: Berechnung der Systemantwort mit der Gewichtsfunktion	349
19 Anhang 3: Fensterfunktionen	351
19.1 Einführung	351
19.2 Einige Fensterfunktionen	351
19.2.1 Rechteckfenster	351
19.2.2 Cosinusfenster	353
19.3 Blackman-Fenster	354
19.4 Dolph-Tschebycheff-Fenster	354
19.5 Kaiser-Fenster	355
20 Anhang 4: Transformation von Übertragungsfunktionen	357
20.1 Vereinbarungen	357
20.2 Transformation der Übertragungsfunktionen	357
20.3 Wichtige Transformationen	359
21 Anhang 5: Entwurf zeitkontinuierlicher Filter	363
21.1 Festlegung des Toleranzschemas	363
21.2 Transformation von Übertragungsfunktionen	364
21.3 Ermittlung des Toleranzschemas des Normtiefpasses	364
21.4 Entwurf zeitkontinuierlicher Normtiefpässe	365
21.4.1 Einführung	365
21.4.2 Definition der Normtiefpässe	367
21.5 Transformation des Normtiefpasses in das gewünschte Filter	374

22 Anhang 6: Bilineare Transformation	377
22.1 Definition der bilinearen Transformation	377
22.2 Eigenschaften der bilinearen Transformation	378
22.3 Bestimmung des Transformationsfaktors A	378
22.4 Numerische Ausführung der bilinearen Transformation	379
22.5 Transformationsmatrizen	379
22.6 Inversion der bilinearen Transformation	380
22.7 Beispiel	381
23 Anhang 7: Der FFT-Algorithmus	383
24 Anhang 8: Herleitung der Spline-Interpolation	389
25 Anhang 9: Matrizen	393
25.1 Definition der Matrix	393
25.2 Rechenregeln	394
25.3 Transposition einer Matrix	395
25.3.1 Definition und Rechenregeln	395
25.3.2 Orthogonale Matrizen	396
25.3.3 Rechnen mit Transponierten	397
25.4 Determinante einer Matrix	397
25.5 Rang einer Matrix	398
25.6 Inverse einer quadratischen Matrix	399
25.7 Normen von Vektoren und quadratischen Matrizen	400
25.8 Differentiation nach Vektoren	400
25.9 Matrizenpolynome	401
25.10 Eigenwerte und Eigenvektoren	402
25.11 Spezielle Matrizen	403
26 Literaturverzeichnis	405
27 Zur beiliegenden CD	407
27.1 Matlab-Dateien	407
27.2 PDF-Dateien	408
Stichwortverzeichnis	409

1 Signale

1.1 Einführung

In allen Bereichen der Technik möchte man über den Zustand eines Vorgangs Bescheid wissen. Der Autofahrer möchte sich über seine Geschwindigkeit informieren, ein Elektriker muss die Höhe der Spannung in einem elektrischen Hausnetz kennen, und ein Bierbrauer muss die Temperaturverhältnisse in seinem Sudkessel überwachen. In allen Fällen benötigt er ein Gerät, mit dessen Hilfe er die betreffende Größe bestimmen kann. Der Bau derartiger Messgeräte ist Aufgabe der Messtechnik. Wir sind nur an den Ergebnissen und deren Weiterverarbeitung interessiert. Hierzu benötigen wir eine allgemeine, nicht von der jeweiligen Technik abhängige Ausdrucksweise.

Der Zustand einer physikalischen Größe wird *Signal* genannt. Die physikalische Größe selbst fungiert als *Träger* des Signals. Zwei oder mehr Träger können das gleiche Signal tragen. Die erste Umsetzung eines Signals nennt man Messung und das dazu nötige Gerät *Messinstrument*. Geräte, die weitere Übergänge eines Signals von Trägern auf andere ermöglichen, werden Umsetzer genannt. Beispielsweise wird bei einem Strommesser das Signal vom Träger Strom auf den Träger Winkel des Instrumentenzeigers umgesetzt.

Es ist auch möglich, Signale auf einem Rechner zu simulieren.

Bisher wurde unterstellt, dass ein Signal zu jedem beliebigen Zeitpunkt existiert. Man spricht in diesem Falle von einem *zeitkontinuierlichen* Signal. Wenn man dieses Signal nur zu bestimmten Zeiten abliest und den Messwert verkündet, so entsteht eine *Zahlenfolge*, die man auch als *zeitdiskretes* Signal auffassen kann. In der Technik wird dieses Ablesen durch einen *Analog-Digital-Umsetzer* bewerkstelligt. Es macht auch keine Schwierigkeiten mittels *Digital-Analog-Umsetzer* aus einer Zahlenfolge wieder ein zeitkontinuierliches Signal zu erzeugen.

Ist der Signalzustand konstant, so spricht man vom *Gleichsignal*. Im Allgemeinen verändert sich der Zustand. Dann liegt ein *zeitveränderliches Signal* vor.

1.2 Klassifizierung von Signalen

Signale werden unter vielfältigen Gesichtspunkten klassifiziert.

1. *Determinierte und stochastische Signale*

Ein *determiniertes* Signal kann durch eine mathematische Funktion exakt beschrieben werden. Bei *stochastischen* Signalen besteht eine Beschreibung mit einer Funktion prinzipiell nicht. Lediglich die Angabe von Mittelwerten, Amplitudenverteilungen oder ähnlichem ist möglich.

2. *Periodische und aperiodische Signale*

Ein Signal ist *periodisch*, wenn folgende Beziehung gilt:

$$x(t) = x(t \pm nt_P) \quad \text{Signalperiode: } t_P, n \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Gilt diese Beziehung nicht, so ist das Signal *aperiodisch*.

3. *Signale mit und ohne beschränkte Variation*

An derartige Signale sind zwei Bedingungen zu stellen. Erstens muss $|x(t)| \neq \infty$ gelten, die *Signalamplitude* muss also begrenzt sein. Zweitens muss bei periodischen oder abschnittsweise periodischen Signalen die Periode von null verschieden sein.

Die Feststellung, dass die Bogenlänge der Signalfunktion in einem endlichen Intervall endlich sein muss, ist gleichbedeutend. Diese Bedingung ist für praktisch relevante Signale stets erfüllt.

4. *Energie- und Leistungssignale*

Für ein *Energiesignal* $x(t)$ muss gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty. \quad (1.2)$$

Für ein *Leistungssignal* muss dagegen gelten:

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt < \infty. \quad (1.3)$$

5. *Stetige und unstetige Signale*

Ein Signal wird *stetig* genannt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} x(t \pm \Delta t) = x(t) \quad \forall t. \quad (1.4)$$

Gilt diese Beziehung nicht, dann ist das Signal *unstetig*.

Das typische unstetige Signal ist der *Einheitssprung*:

$$\epsilon(t - T_0) = 0 \quad \text{für } t < T_0 \quad \text{und} \quad \epsilon(t - T_0) = 1 \quad \text{für } t > T_0. \quad (1.5)$$

Aus dem Einheitssprung wird das *Rechtecksignal*, auch *Impulsfunktion* genannt, abgeleitet:

$$\text{rect}(t - T_0, \tau) = \epsilon(t - T_0 + \frac{\tau}{2}) - \epsilon(t - T_0 - \frac{\tau}{2}). \quad (1.6)$$

Ist für ein Rechtecksignal die linke Grenze T_l und die rechte Grenze T_r gegeben, so ergibt sich:

$$\tau = T_r - T_l \quad \text{und} \quad T_0 = \frac{T_r + T_l}{2}. \quad (1.7)$$

6. *Gerade und ungerade Signale*

Für ein *gerades Signal* gilt $x(-t) = x(t)$. Für ein *ungerades Signal* gilt dagegen $x(-t) = -x(t)$.

7. *Signalklassifizierung nach der zeitlichen Erstreckung*

Ein Signal $x(t)$ habe den zeitlichen Definitionsbereich $-\infty \leq t \leq \infty$.

Aus diesem Signal werden neue Signale nach Tabelle 1.1 gebildet.

Tabelle 1.1: Begrenzte Signale

Bezeichnung	Mathematische Beschreibung
Rechtsseitiges Signal	$x_R(t) = x(t) \cdot \epsilon(t - T_0)$
Linksseitiges Signal	$x_L(t) = x(t) \cdot (1 - \epsilon(t - T_0))$
Beidseitig begrenztes Signal	$x_B(t) = x(t) \cdot \text{rect}(t - T_0, T)$

Rechtsseitige Signale heißen auch *geschaltete* oder *kausale* Signale.

Mit dem Demonstrationsprogramm *liresi* werden die verschiedenen Signalbegrenzungen demonstriert. Siehe hierzu Abbildung 1.1.

Aufgrund der technischen Begrenzungen kann man in einem Rechner grundsätzlich nur zeitbegrenzte Signale darstellen. Die oben getroffenen Einteilungen sind aber trotzdem hilfreich.

8. *Klassifizierung nach der Signalamplitude*

Technische Signale sind in der Amplitude stets begrenzt, es gilt also

$$x_{min} \leq x(t) \leq x_{max}. \quad (1.8)$$

Kann nun die Signalamplitude innerhalb dieses Intervalls jeden beliebigen Wert annehmen, so ist das Signal *wertkontinuierlich*, *amplitudenkontinuierlich* oder *analog*.

Kann das Signal innerhalb des Intervalls nur endlich viele Werte annehmen, gilt also zu allen Zeiten $x(t) \in \{x_{min}, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{max}\}$, so ist es *wertdiskret*, *amplitudendiskret* oder *digital*. Kann das Signal nur zwei Amplitudenwerte annehmen, so ist es *binär*.

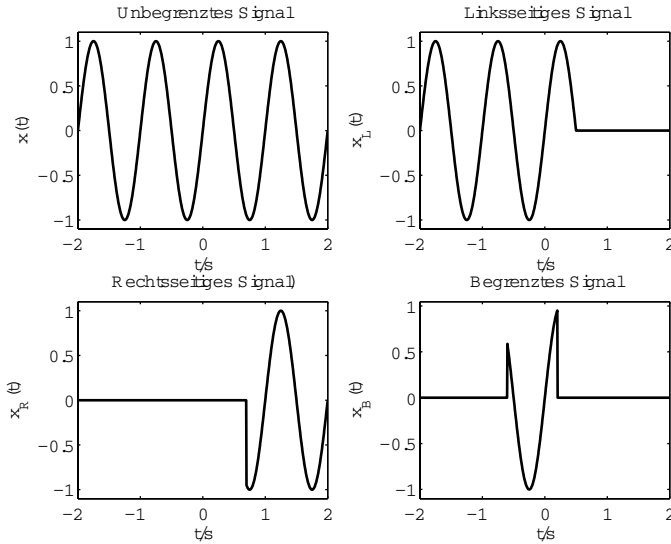


Abbildung 1.1: Linksseitige, rechtsseitige und begrenzte Signale

1.3 Grundoperationen an Signalen

1.3.1 Spiegelung und Verschiebung von Signalen

Gegeben sei ein Signal $x(t)$. Dieses Signal kann gespiegelt und verschoben werden. Die wichtigsten Operationen sind in Tabelle 1.2 dargestellt.

Tabelle 1.2: Signaloperationen

Operation	Ergebnis
Rechtsverschiebung	$x_R(t) = x(t - T)$
Linksverschiebung	$x_L(t) = x(t + T)$
Spiegelung	$x_S(t) = x(-t)$
Spiegelung und Rechtsverschiebung	$x_{SR}(t) = x(-t + T)$
Spiegelung und Linksverschiebung	$x_{SL}(t) = x(-t - T)$

Diese Verschiebungen und Spiegelungen kann man mit dem Demonstrationsprogramm *spvrsi* zeigen. In Abbildung 1.2 ist ein Beispiel dargestellt.

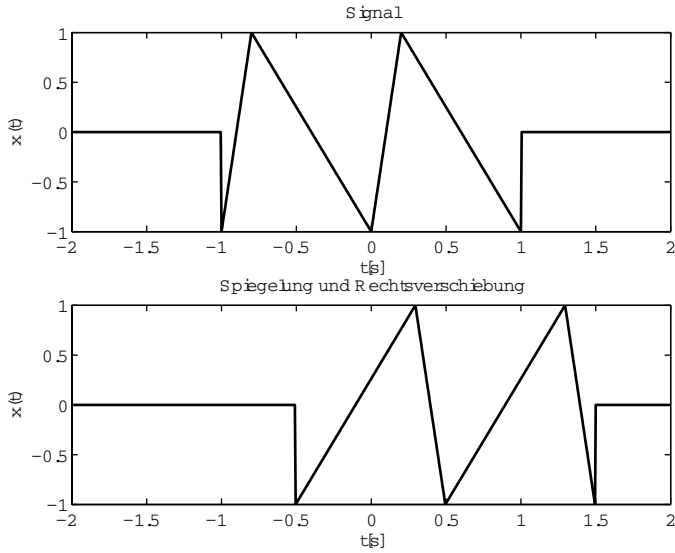


Abbildung 1.2: Verschiebung und Spiegelung

1.3.2 Zerlegung von Signalen

Jedes beliebige Signal $x(t)$ lässt sich in die Summe aus einem geraden Signal $g(t)$ und einem ungeraden Signal $u(t)$ zerlegen:

$$x(t) = g(t) + u(t). \quad (1.9)$$

Dann gilt auch mit den oben festgelegten Gesetzmöglichkeiten

$$x(-t) = g(t) - u(t). \quad (1.10)$$

Daraus ergibt sich die Berechnungsvorschrift

$$g(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad \text{und} \quad u(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}. \quad (1.11)$$

Die Demonstration mit *geugsi* für ein harmonisches Signal zeigt Abbildung 1.3. Für kausale Signale gilt

$$x_k(t) = x(t) \cdot \epsilon(t) \quad \text{und} \quad x_k(-t) = x(-t) \cdot \epsilon(-t). \quad (1.12)$$

Damit wird für die Zerlegung nach Formel 1.11:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{x(t)}{2} \quad \text{für } t > 0 \quad \text{und} \quad g(t) = \frac{x(-t)}{2} \quad \text{für } t < 0 \\ u(t) &= \frac{x(t)}{2} \quad \text{für } t > 0 \quad \text{und} \quad u(t) = -\frac{x(-t)}{2} \quad \text{für } t < 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

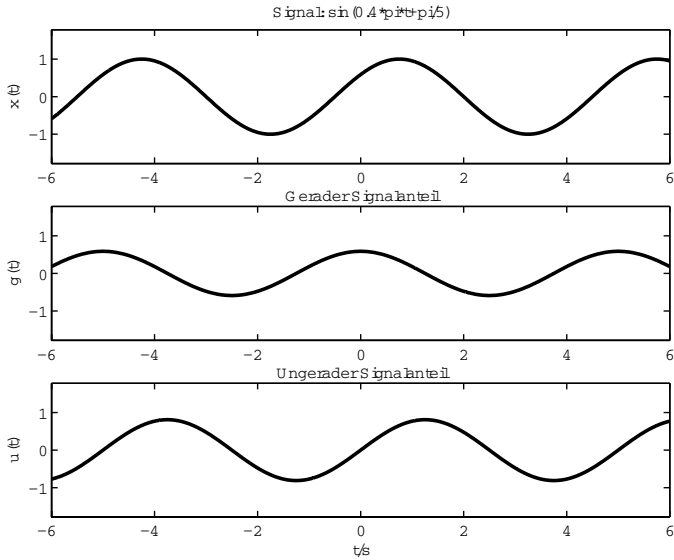


Abbildung 1.3: Zerlegung eines harmonischen Signals

Bei kausalen Signalen besteht zwischen dem geraden und dem ungeraden Signalanteil folgende Beziehung:

$$g(t) = \text{sign}(t)u(t) \quad \text{und} \quad u(t) = \text{sign}(t)g(t). \quad (1.14)$$

Die Abbildung 1.4 zeigt auch hierfür ein Beispiel. Zum Abschluss zeigt Abbildung 1.5 noch die Zerlegung eines Pulses.

1.4 Zeitdiskrete determinierte Signale

1.4.1 Zahlenfolge

Eine Abfolge einzelner Zahlen wird zusammenfassend *Zahlenfolge* genannt. Im Rechner werden Zahlenfolgen als Vektoren dargestellt:

$$(x) = (\dots, 3, 2.5, 8.5, \dots). \quad (1.15)$$

Die einzelnen Elemente der Zahlenfolge können reelle oder komplexe Zahlen sein. In der Technik hat man es zumeist mit reellen Zahlen zu tun, deren Elemente immer der Relation $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ genügen.

Kann x in diesem Intervall nur eine endliche Anzahl von Werten annehmen, so liegt eine *wertdiskrete Zahlenfolge* vor. Können die Werte unendlich dicht liegen, spricht man von einer *wertkontinuierlichen Zahlenfolge*.

Die wichtigsten Regeln für Operationen an und mit Zahlenfolgen sind in Tabelle 1.3 dargestellt.

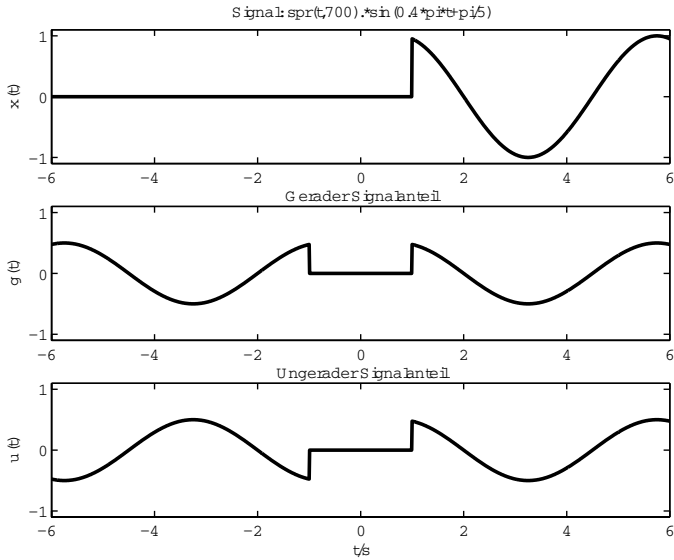


Abbildung 1.4: Zerlegungen eines kausalen Signals

Tabelle 1.3: Operationen an Zahlenfolgen

Bezeichnung	Operation	Elementoperation
Multiplikation mit einer Konstanten	$(z) = k(x)$	$z(n) = kx(n)$
Addition von Zahlenfolgen	$(z) = (x) + (y)$	$z(n) = x(n) + y(n)$
Multiplikation von Zahlenfolgen	$(z) = (x) \cdot (y)$	$z(n) = x(n) \cdot y(n)$
Inversion einer Zahlenfolge	$(z) = (x)^{-1}$	$z(n) = x(n)^{-1}$

1.4.2 Zeitreihe

Zu bestimmten Zeiten trete eine Zahl auf, wie z.B. bei der Bekanntgabe der Börsenkurse durch einen Radiosprecher. Die Gesamtheit dieser Zahlen nennt man eine *Zeitreihe*, die man als *Zahlenfolge* speichern kann.

Eine Zeitreihe ist vollständig beschrieben, wenn für jedes Element der Zeitpunkt seines Auftretens bekannt ist. Genau genommen benötigt man also zwei Zahlenfolgen, um eine Zeitreihe zu fixieren:

$$\begin{aligned} (x) &= (\dots x_1, x_2, x_3, \dots) \\ (t) &= (\dots t_1, t_2, t_3, \dots). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Dafür wird dann auch geschrieben:

$$(x) = (x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots). \tag{1.17}$$

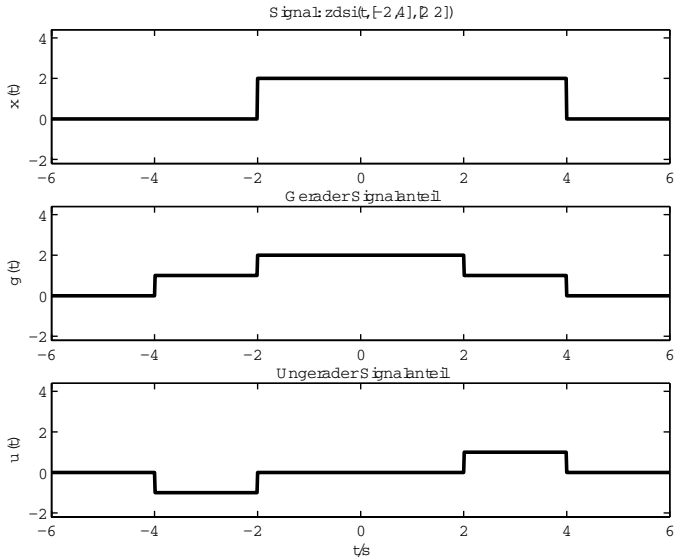


Abbildung 1.5: Zerlegungen eines Pulses

Lassen sich die Zeitpunkte, zu denen jeweils ein Element der Zeitreihe existiert, als $t_n = nT$ darstellen, spricht man von einer *äquidistanten Zeitreihe*. Das Element zur Zeit $t = nT$ heißt $x(nT)$ oder $x(n)$. Die gesamte Zeitreihe ist

$$(x) = (x(-\infty), \dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots, x(\infty)). \quad (1.18)$$

Es werden im Folgenden nur äquidistante Zeitreihen untersucht.

In manchen Fällen werden mehrere Zeitreihen zu einer Matrix zusammengefasst. Man schreibt dann beispielsweise:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & x_1(-2T) & x_1(-T) & x_1(0) & x_1(T) & x_1(2T) & \dots \\ \dots & x_2(-2T) & x_2(-T) & x_2(0) & x_2(T) & x_2(2T) & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & x_n(-2T) & x_n(-T) & x_n(0) & x_n(T) & x_n(2T) & \dots \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

1.4.3 Zeitdiskretes Signal

Nun wird eine *Funktion* gesucht, die als mathematisches Modell für eine Zeitreihe geeignet ist. Diese Funktion muss einige spezielle Eigenschaften haben:

1. Die Funktion muss zu den Zeitpunkten nT den Wert $x(n)$ annehmen.

2. Der Wert zwischen den den Zeitpunkten nT und $(n + 1)T$ ist beliebig. Man setzt ihn am besten zu null.
3. Die Funktion muss integrierbar sein.

Die Mathematik stellt für dieses Modell die *Diracsche Deltafunktion* zur Verfügung.

1.4.3.1 Deltafunktion

Die Deltafunktion, auch *Deltaimpuls* genannt, wird durch einen Grenzprozess definiert. Ausgangspunkt der Überlegungen ist die endliche Stoßfunktion:

$$\begin{aligned}
 I(t - nT, \tau) &= 0 \quad \text{für } t \leq nT - \frac{\tau}{2} \\
 &= \frac{1}{\tau} \quad \text{für } nT - \frac{\tau}{2} \leq t \leq nT + \frac{\tau}{2} \\
 &= 0 \quad \text{für } t \geq nT + \frac{\tau}{2}.
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Die Fläche unter dieser Funktion ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(t - nT, \tau) dt = 1. \tag{1.21}$$

Nun wird eine Folge von Funktionen mit

$$I_m(t - nT, \frac{\tau}{m}) \quad \text{für } m = 1, 2, 4, 8, 16, \dots \tag{1.22}$$

definiert, wobei jedes I_m nur noch halb so breit, aber doppelt so hoch wie sein Vorgänger ist. Betrachtet man für diese Funktionenfolge die Grenzfunktion

$$\delta(t - nT) = \lim_{m \rightarrow \infty} I_m(t - nT, \frac{\tau}{m}), \tag{1.23}$$

so erhält man die *Deltafunktion* in der Form

$$\delta(t - nT) = \infty \quad \text{für } t = nT \quad \text{und} \quad \delta(t - nT) = 0 \quad \text{für } t \neq nT. \tag{1.24}$$

Die Abbildung 1.6 zeigt den Anfang des Grenzübergangs.

Der Wert einer Zeitreihe a zur Zeit nT wird somit als Gewicht der Deltafunktion zu diesem Zeitpunkt interpretiert. Nun folgt direkt aus Formel 1.21

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) dt = 1. \tag{1.25}$$

Mit der Deltafunktion lässt sich für ein Element einer Zahlenfolge nun ein mathematisches Modell angeben:

$$x(nT) \sim x(t_n) \delta(t - t_n). \tag{1.26}$$

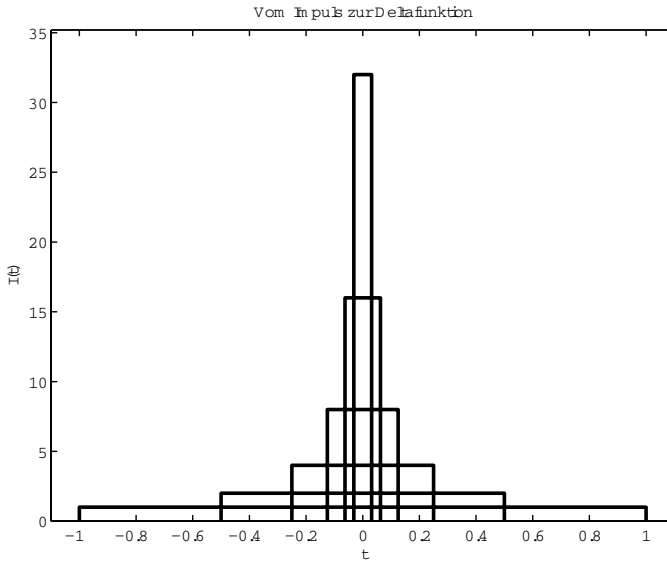


Abbildung 1.6: Grenzübergang

Die Beschränkung auf einen Zeitpunkt entspricht vollständig den vereinfachten Bildern vom Massepunkt und von der Punktladung in der Physik.

Rechenregeln für Deltafunktionen sind in Tabelle 1.4 zusammengefasst. Aus der Ausblendeigenschaft folgt auch:

$$\begin{aligned}\delta(t - t_1) \cdot \delta(t - t_1) &= \delta(t - t_1) \\ \delta(t - t_1) \cdot \delta(t - t_2) &= 0.\end{aligned}\tag{1.27}$$

1.4.3.2 Darstellung von Zeitreihen durch zeitdiskrete Signale

Wendet man Formel 1.26 auf die äquidistante Zeitreihe nach Formel 1.18 an, so erhält man ein *zeitdiskretes Signal*

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t - nT).\tag{1.28}$$

Ein Sonderfall ist der *Deltapuls*

$$D(t, T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).\tag{1.29}$$

Ein weiteres wichtiges Signal ist der *Deltaburst*

$$D_b(t, T) = \sum_{n=-u}^o \delta(t - nT).\tag{1.30}$$

Tabelle 1.4: Rechenregeln für Deltafunktionen

Bezeichnung	Beziehung
Linearität	$a_1\delta(t - nT) + a_2\delta(t - nT) = (a_1 + a_2)\delta(t - nT)$
Ausblendeigenschaft	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t - nT)dt = x(n)$
Skalierung	$\delta(\alpha(t - nT)) = \frac{1}{ \alpha }\delta(t - nT)$
Symmetrie	$\delta(-t) = \delta(t)$

1.4.3.3 Deltaabtastung von zeitkontinuierlichen Signalen

Ist $x(t)$ ein für alle t definiertes zeitkontinuierliches Signal, so kann man auch schreiben:

$$x^*(t) = x(t) \cdot D(t, T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT). \quad (1.31)$$

Man kann sich dann ein zeitdiskretes Signal als *Deltaabtastung* eines zeitkontinuierlichen Signals entstanden denken. Daher nennt man $x^*(t)$ auch *modulierter Deltapuls*.

Einige wichtige deterministische zeitdiskrete Signale, die sich formal durch eine Deltaabtastung entwickeln lassen, sind in Tabelle 1.5 zusammengefasst. Diese Signale sind nicht realisierbar. Sie sind aber als zugeordnete Zahlenfolgen darstellbar. Mit dem Demonstrationsprogramm *sige* kann man determinierte zeitdiskrete Signale erzeugen. Die Abbildung 1.7 zeigt dazu ein Beispiel.

Tabelle 1.5: Deterministische zeitdiskrete Signale

Name	Beschreibung
Einheitssprung	$\epsilon^*(t) = \epsilon(t)D(t, T)$
Deltaburst	$D_b(t, T) = \sum_{n=u}^o \delta(t - nT)$
Sinussignal	$x^*(t) = A\sin(\omega t + \varphi)D(t, T)$
Zeigersignal	$x^*(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)}D(t, T)$

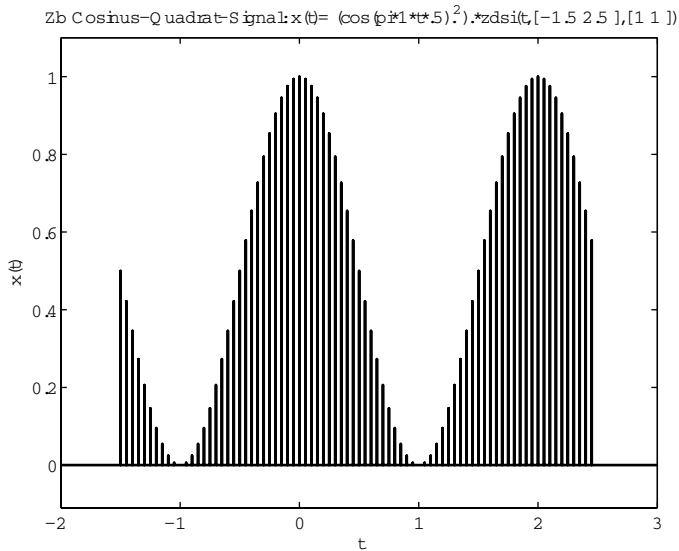


Abbildung 1.7: Beispiel eines zeitdiskreten Signals

Die Beschreibung von Zeitreihen durch zeitdiskrete Signale erlaubt die Übertragung des Energiebegriffes auf Zeitreihen. Aus der Definition für Energiesignale folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)^2 < \infty. \quad (1.32)$$

Es liegt also eine *Energiezeitreihe* vor, wenn die Summe der Quadrate ihrer Elemente endlich ist.

1.5 Stochastische zeitdiskrete Signale

Die hier vorgenommene Beschränkung auf zeitdiskrete stochastische Signale ist aus zwei Gründen vertretbar:

1. Viele Signale sind von ihrem Wesen her zeitdiskret, oder werden durch ihre Erfassung bereits diskretisiert.
2. Die Signalverarbeitung ist in jedem Falle zeitdiskret.

Definiert ist ein zeitdiskretes Signal

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t - nT). \quad (1.33)$$

Zeitdiskrete Signale, deren Abtastwerte $x(n)$ sich nicht aus einem mathematischen Zusammenhang herleiten lassen, bilden eine eigene Signalklasse, die *zeitdiskreten stochastischen Signale*. Sie werden auch *Zufallssignale* genannt. Die Spezifikation *zeitdiskret* wird wenn möglich auch weggelassen. Der Entstehung eines Zufallssignals liegt oft ein *Zufallsexperiment* zugrunde.

Ein Zufallsexperiment kann zeitlich begrenzt oder auch zeitlich unbegrenzt ablaufen. Somit entstehen zeitlich begrenzte oder unbegrenzte Zufallssignale. Zeitlich unbegrenzte Zufallssignale haben *unendliche Energie*.

Die Werte eines Zufallsexperiments, also die einzelnen Werte eines Zufallssignals, nennt man *Zufallsergebnisse* oder auch *Elementarereignisse*.

Die zwei bekanntesten Arten zur Erzeugung von Zufallsergebnissen sind:

1. *Das Werfen von Münzen*

Eine Münze kann nach dem Fall entweder die Zahl oder das Wappen zeigen. Diesen Zufallsergebnissen ordnet man die Werte 0 oder 1 zu.

2. *Das Werfen eines Würfels*

Jetzt sind die Zufallsergebnisse die Augenzahlen $\{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\}$.

Die Erzeugung dieser Zufallssignale lässt sich *von Hand* nur mit Mühe bewerkstelligen. Will man diesen Vorgang mit einem Rechner nachbilden, so steht man vor einem Problem. Man kann jetzt Zufallsergebnisse nur durch ein Programm bilden. Programme können aber nur determinierte Zahlenfolgen generieren. Man suche daher nach Algorithmen, die sogenannte *Pseudozufallszahlen* erzeugen. Es gibt viele derartige *Zufallszahlengeneratoren*.

1. *Verallgemeinerter Würfel*

Es lässt sich ein Zufallszahlengenerator als Verallgemeinerung des Würfels erstellen. Während der Spielwürfel sechs Seiten hat, kann man Würfel mit beliebiger Seitenzahl programmieren.

2. *Gleichverteiltes Zufallssignal*

Hierbei handelt es sich um einen Generator für reelle Zahlen im Bereich $0 \leq x \leq 1$.

3. *Normalverteiltes Zufallssignal*

Das ist ein Zufallssignal, das man sich beispielsweise als Deltaabtastung der Rauschspannung einer Antenne vorstellen kann.

In einem späteren Kapitel werden einige Algorithmen für die Generierung von Pseudozufallsfolgen näher betrachtet.