Vogel Studienmodule

Helmut Roderer
Alfred Pecher

Digitale Signalverarbeitung

mit CD-ROM

VOGEL

Helmut Roderer / Alfred Pecher

Digitale Signalverarbeitung

Eine Einführung

mit Demonstrationsbeispielen und Programm-CD

Vogel Buchverlag

Professor Dipl.Ing. HELMUT RODERER, geboren 1936 in Würzburg, studierte Regelungstechnik und technische Elektronik an der Technischen Universität Darmstadt. Ab 1964 arbeitete er in der Industrie, hauptsächlich bei der Dornier AG. Seit 1973 lehrt er an der Hochschule für angewandte Wissenschaften, Fachhochschule Würzburg-Schweinfurt, das Fach Prozessdatenverarbeitung im Studiengang Informationstechnik.

Dr.-Ing. ALFRED PECHER, geboren 1964 in Reutlingen, studierte Informationstechnik an der Fachhochschule Würzburg-Schweinfurt und Allgemeine Elektrotechnik an der Friedrich Alexander Universität Erlangen. Er promovierte neben seiner beruflichen Tätigkeit an der Technischen Universität Ilmenau auf dem Gebiet der Signalverarbeitung im menschlichen Gehirn. Seit 2000 arbeitet er, zuletzt in leitender Funktion, bei der Schaeffler KG in Herzogenaurach und gibt nebenher Vorlesungen in seinem Fachgebiet der Signal- und Systemtheorie.

Weitere Informationen:
www.vogel-buchverlag.de

ISBN 978-3-8343-3115-1
1. Auflage. 2010

Printed in Germany

Vorwort

Dieses Werk entstand aus Vorlesungen an der Hochschule für angewandte Wissenschaften, Fachhochschule Würzburg-Schweinfurt, zum Fachgebiet Prozessdatenverarbeitung.

In diesem Fachbuch wird hauptsächlich auf die Theorie determinierter Signale eingegangen. Aber auch die wesentlichen Eigenschaften stochastischer Signale und ihre technische Generierung werden besprochen.

Zusätzlich findet neben der Signaltheorie und deren Verarbeitung die Beschreibung und der Entwurf von Systemen ausführlichen Raum.

Gemäß ihrer praktischen Relevanz stehen dabei die zeitdiskreten Signale und Systeme im Vordergrund. Ihre zeitkontinuierlichen Entsprechungen werden nur insoweit behandelt, wie sie für das Verständnis und den Entwurf der zeitdiskreten Signale und Systeme benötigt werden.

Gängige Verfahren wie beispielsweise die Laplace- und die Fouriertransformation sind für beide Signalklassen genauso enthalten wie die Klassifizierung zeitdiskreter Signale und Systeme. Der Entwurf spezieller Systeme wie Filter, Integrations- und Differentiationsalgorithmen sowie Hilberttransformatoren ist anschaulich dargestellt.

Dem Interessenskonflikt zwischen Lehrer und Student, nämlich dem Wunsch nach theoretischer Vollständigkeit und Klarheit einerseits und nach möglichst raschem Zugang zu praktikablen Lösungen andererseits wird diesem Fachbuch dadurch Rechnung getragen, dass möglichst jedem theoretisch orientierten Kapitel Demonstrationsbeispiele in *Matlab* zugeordnet sind. Diese Beispiele finden sich auf der beigefügten CD. So kann jeder Student entweder auf der eigenen PC-Installation oder im Rechnerpool seiner Hochschule die besprochenen theoretischen Grundlagen unmittelbar erproben.

Eine so umfangreiche Zusammenstellung der wichtigsten Zusammenhänge aus der Signal- und Systemtheorie lässt sich nur mit der Unterstützung und mit der guten Zusammenarbeit eines erfahrenen Verlages umsetzen, wofür wir uns herzlich bedanken.

Helmut Roderer, Alfred Pecher

Inhaltsverzeichnis

1 Signale

1.1 Einführung

In allen Bereichen der Technik möchte man über den Zustand eines Vorgangs Bescheid wissen. Der Autofahrer möchte sich über seine Geschwindigkeit informieren, ein Elektriker muss die Höhe der Spannung in einem elektrischen Hausnetz kennen, und ein Bierbrauer muss die Temperaturverhältnisse in seinem Sudkessel überwachen. In allen Fällen benötigt er ein Gerät, mit dessen Hilfe er die betreffende Größe bestimmen kann. Der Bau derartiger Messgeräte ist Aufgabe der Messtechnik. Wir sind nur an den Ergebnissen und deren Weiterverarbeitung interessiert. Hierzu benötigen wir eine allgemeine, nicht von der jeweiligen Technik abhängige Ausdrucksweise.

Der Zustand einer physikalischen Größe wird *Signal* genannt. Die physikalische Größe selbst fungiert als *Träger* des Signals. Zwei oder mehr Träger können das gleiche Signal tragen. Die erste Umsetzung eines Signals nennt man Messung und das dazu nötige Gerät *Messinstrument.* Geräte, die weitere Übergänge eines Signals von Trägern auf andere ermöglichen, werden Umsetzer genannt. Beispielsweise wird bei einem Strommesser das Signal vom Träger Strom auf den Träger Winkel des Instrumentenzeigers umgesetzt.

Es ist auch möglich, Signale auf einem Rechner zu simulieren.

Bisher wurde unterstellt, dass ein Signal zu jedem beliebigen Zeitpunkt existiert. Man spricht in diesem Falle von einem *zeitkontinuierlichen* Signal. Wenn man dieses Signal nur zu bestimmten Zeiten abliest und den Messwert verkündet, so entsteht eine *Zahlenfolge*, die man auch als *zeitdiskretes* Signal auffassen kann. In der Technik wird dieses Ablesen durch einen *Analog-Digital-Umsetzer* bewerkstelligt. Es macht auch keine Schwierigkeiten mittels *Digital-Analog-Umsetzer* aus einer Zahlenfolge wieder ein zeitkontinuierliches Signal zu erzeugen.

Ist der Signalzustand konstant, so spricht man vom *Gleichsignal.* Im Allgemeinen verändert sich der Zustand. Dann liegt ein *zeitveränderliches Signal* vor.

1.2 Klassifizierung von Signalen

Signale werden unter vielfältigen Gesichtspunkten klassifiziert.

1. *Determinierte und stochastische Signale*
   Ein *determiniertes* Signal kann durch eine mathematische Funktion exakt beschrieben werden. Bei *stochastischen* Signalen besteht eine Beschreibung mit einer Funktion prinzipiell nicht. Lediglich die Angabe von Mittelwerten, Amplitudenverteilungen oder ähnlichem ist möglich.

2. *Periodische und aperiodische Signale*
   Ein Signal ist *periodisch*, wenn folgende Beziehung gilt:
   $$x(t) = x(t \pm nt_P) \quad \textit{Signalperiode:} \quad t_P,\ n \in N. \tag{1.1}$$
   Gilt diese Beziehung nicht, so ist das Signal *aperiodisch*.

3. *Signale mit und ohne beschränkte Variation*
   An derartige Signale sind zwei Bedingungen zu stellen. Erstens muss $|x(t)| \neq \infty$ gelten, die *Signalamplitude* muss also begrenzt sein. Zweitens muss bei periodischen oder abschnittsweise periodischen Signalen die Periode von null verschieden sein.
   Die Feststellung, dass die Bogenlänge der Signalfunktion in einem endlichen Intervall endlich sein muss, ist gleichbedeutend. Diese Bedingung ist für praktisch relevante Signale stets erfüllt.

4. *Energie- und Leistungssignale*
   Für ein *Energiesignal* $x(t)$ muss gelten:
   $$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt < \infty. \tag{1.2}$$
   Für ein *Leistungssignal* muss dagegen gelten:
   $$0 < \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt < \infty. \tag{1.3}$$

5. *Stetige und unstetige Signale*
   Ein Signal wird *stetig* genannt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:
   $$\lim_{\Delta t\to 0} x(t \pm \Delta t) = x(t) \qquad \forall t. \tag{1.4}$$
   Gilt diese Beziehung nicht, dann ist das Signal *unstetig*.
   Das typische unstetige Signal ist der *Einheitssprung*:
   $$\epsilon(t - T_0) = 0 \quad \text{für} \quad t < T_0 \quad \text{und} \quad \epsilon(t - T_0) = 1 \quad \text{für} \quad t > T_0. \tag{1.5}$$

Aus dem Einheitssprung wird das *Rechtecksignal*, auch *Impulsfunktion* genannt, abgeleitet:

$$rect(t - T_0, \tau) = \epsilon(t - T_0 + \frac{\tau}{2}) - \epsilon(t - T_0 - \frac{\tau}{2}). \tag{1.6}$$

Ist für ein Rechtecksignal die linke Grenze T_l und die rechte Grenze T_r gegeben, so ergibt sich:

$$\tau = T_r - T_l \quad \text{und} \quad T_0 = \frac{T_r + T_l}{2}. \tag{1.7}$$

6. *Gerade und ungerade Signale*
   Für ein *gerades Signal* gilt $x(-t) = x(t)$. Für ein *ungerades Signal* gilt dagegen $x(-t) = -x(t)$.

7. *Signalklassifizierung nach der zeitlichen Erstreckung*
   Ein Signal $x(t)$ habe den zeitlichen Definitionsbereich $-\infty \leq t \leq \infty$.

   Aus diesem Signal werden neue Signale nach Tabelle 1.1 gebildet.

   Tabelle 1.1: Begrenzte Signale

Bezeichnung	**Mathematische Beschreibung**
Rechtsseitiges Signal	$x_R(t) = x(t) \cdot \epsilon(t - T_0)$
Linksseitiges Signal	$x_L(t) = x(t) \cdot (1 - \epsilon(t - T_0))$
Beidseitig begrenztes Signal	$x_B(t) = x(t) \cdot rect(t - T_0, T)$

   Rechtsseitige Signale heißen auch *geschaltete* oder *kausale* Signale.

   Mit dem Demonstrationsprogramm *liresi* werden die verschiedenen Signalbegrenzungen demonstriert. Siehe hierzu Abbildung 1.1.

   Aufgrund der technischen Begrenzungen kann man in einem Rechner grundsätzlich nur zeitbegrenzte Signale darstellen. Die oben getroffenen Einteilungen sind aber trotzdem hilfreich.

8. *Klassifizierung nach der Signalamplitude*
   Technische Signale sind in der Amplitude stets begrenzt, es gilt also

$$x_{min} \leq x(t) \leq x_{max}. \tag{1.8}$$

   Kann nun die Signalamplitude innerhalb dieses Intervalls jeden beliebigen Wert annehmen, so ist das Signal *wertkontinuierlich*, *amplitudenkontinuierlich* oder *analog*.
   Kann das Signal innerhalb des Intervalls nur endlich viele Werte annehmen, gilt also zu allen Zeiten $x(t) \in \{x_{min}, x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{max}\}$, so ist es *wertdiskret*, *amplitudendiskret* oder *digital*. Kann das Signal nur zwei Amplitudenwerte annehmen, so ist es *binär*.

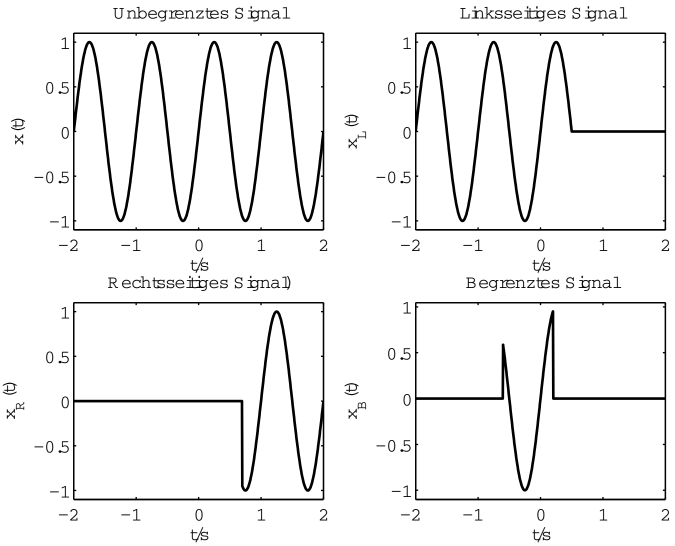

Abbildung 1.1: Linksseitige, rechtsseitige und begrenzte Signale

1.3 Grundoperationen an Signalen

1.3.1 Spiegelung und Verschiebung von Signalen

Gegeben sei ein Signal $x(t)$. Dieses Signal kann gespiegelt und verschoben werden. Die wichtigsten Operationen sind in Tabelle 1.2 dargestellt.

Tabelle 1.2: Signaloperationen

Operation	**Ergebnis**
Rechtsverschiebung	$x_R(t) = x(t-T)$
Linksverschiebung	$x_L(t) = x(t+T)$
Spiegelung	$x_S(t) = x(-t)$
Spiegelung und Rechtsverschiebung	$x_{SR}(t) = x(-t+T)$
Spiegelung und Linksverschiebung	$x_{SL}(t) = x(-t-T)$

Diese Verschiebungen und Spiegelungen kann man mit dem Demonstrationsprogramm *spvrsi* zeigen. In Abbildung 1.2 ist ein Beispiel dargestellt.

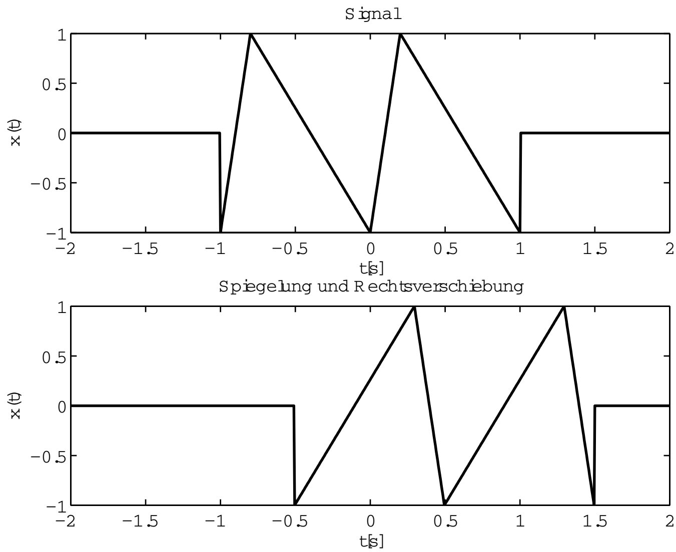

Abbildung 1.2: Verschiebung und Spiegelung

1.3.2 Zerlegung von Signalen

Jedes beliebige Signal $x(t)$ lässt sich in die Summe aus einem geraden Signal $g(t)$ und einem ungeraden Signal $u(t)$ zerlegen:

$$x(t) = g(t) + u(t). \tag{1.9}$$

Dann gilt auch mit den oben festgelegten Gesetzmöglichkeiten

$$x(-t) = g(t) - u(t). \tag{1.10}$$

Daraus ergibt sich die Berechnungsvorschrift

$$g(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad \text{und} \quad u(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}. \tag{1.11}$$

Die Demonstration mit *geugsi* für ein harmonisches Signal zeigt Abbildung 1.3. Für kausale Signale gilt

$$x_k(t) = x(t) \cdot \epsilon(t) \quad \text{und} \quad x_k(-t) = x(-t) \cdot \epsilon(-t). \tag{1.12}$$

Damit wird für die Zerlegung nach Formel 1.11:

$$\begin{aligned} g(t) &= \tfrac{x(t)}{2} \quad \text{für} \quad t > 0 \quad \text{und} \quad g(t) = \tfrac{x(-t)}{2} \quad \text{für} \quad t < 0 \\ u(t) &= \tfrac{x(t)}{2} \quad \text{für} \quad t > 0 \quad \text{und} \quad u(t) = -\tfrac{x(-t)}{2} \quad \text{für} \quad t < 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

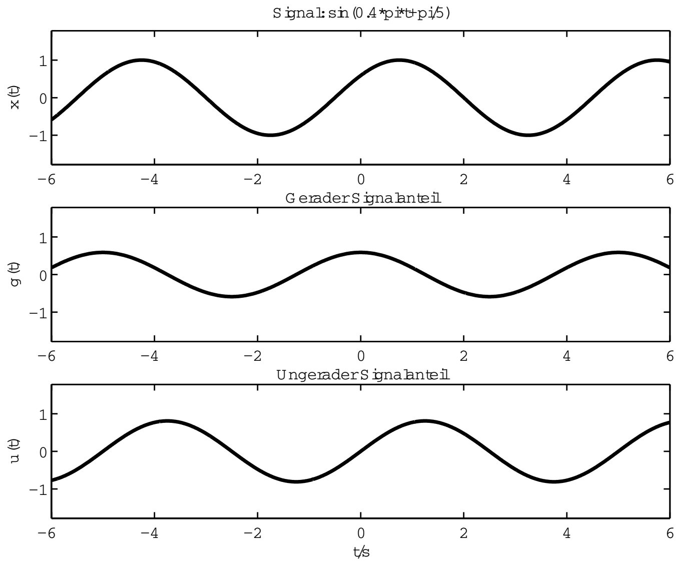

Abbildung 1.3: Zerlegung eines harmonischen Signals

Bei kausalen Signalen besteht zwischen dem geraden und dem ungeraden Signalanteil folgende Beziehung:

$$g(t) = sign(t)u(t) \quad \text{und} \quad u(t) = sign(t)g(t). \tag{1.14}$$

Die Abbildung 1.4 zeigt auch hierfür ein Beispiel. Zum Abschluss zeigt Abbildung 1.5 noch die Zerlegung eines Pulses.

1.4 Zeitdiskrete determinierte Signale

1.4.1 Zahlenfolge

Eine Abfolge einzelner Zahlen wird zusammenfassend *Zahlenfolge* genannt. Im Rechner werden Zahlenfolgen als Vektoren dargestellt:

$$(x) = (...3, 2.5, 8.5, ...). \tag{1.15}$$

Die einzelnen Elemente der Zahlenfolge können reelle oder komplexe Zahlen sein. In der Technik hat man es zumeist mit reellen Zahlen zu tun, deren Elemente immer der Relation $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ genügen.

Kann x in diesem Intervall nur eine endliche Anzahl von Werten annehmen, so liegt eine *wertdiskrete Zahlenfolge* vor. Können die Werte unendlich dicht liegen, spricht man von einer wertkontinuierlichen Zahlenfolge.

Die wichtigsten Regeln für Operationen an und mit Zahlenfolgen sind in Tabelle 1.3 dargestellt.

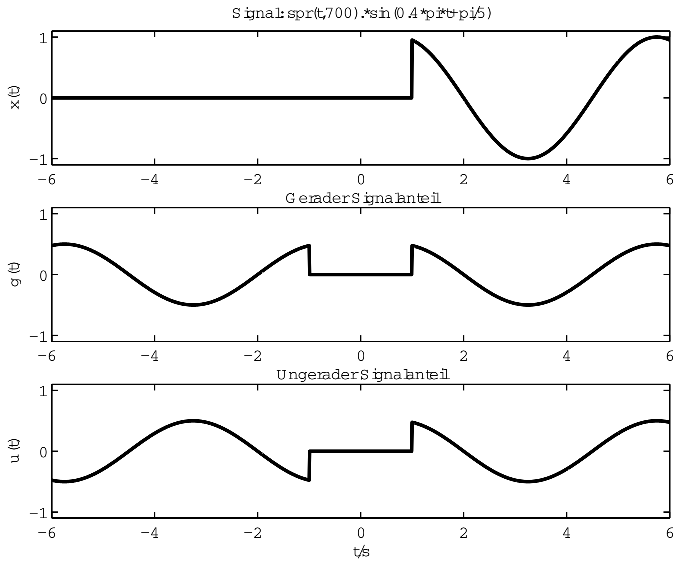

Abbildung 1.4: Zerlegungen eines kausalen Signals

Tabelle 1.3: Operationen an Zahlenfolgen

Bezeichnung	**Operation**	**Elementoperation**
Multiplikation mit einer Konstanten	$(z) = k(x)$	$z(n) = kx(n)$
Addition von Zahlenfolgen	$(z) = (x) + (y)$	$z(n) = x(n) + y(n)$
Multiplikation von Zahlenfolgen	$(z) = (x) \cdot (y)$	$z(n) = x(n) \cdot y(n)$
Inversion einer Zahlenfolge	$(z) = (x)^{-1}$	$z(n) = x(n)^{-1}$

1.4.2 Zeitreihe

Zu bestimmten Zeiten trete eine Zahl auf, wie z.B. bei der Bekanntgabe der Börsenkurse durch einen Radiosprecher. Die Gesamtheit dieser Zahlen nennt man eine *Zeitreihe*, die man als *Zahlenfolge* speichern kann.

Eine Zeitreihe ist vollständig beschrieben, wenn für jedes Element der Zeitpunkt seines Auftretens bekannt ist. Genau genommen benötigt man also zwei Zahlenfolgen, um eine Zeitreihe zu fixieren:

$$\begin{aligned} (x) &= (...x_1, x_2, x_3, ...) \\ (t) &= (...t_1, t_2, t_3, ...). \end{aligned} \qquad (1.16)$$

Dafür wird dann auch geschrieben:

$$(x) = (x(t_1), x(t_2), x(t_3), ...). \qquad (1.17)$$

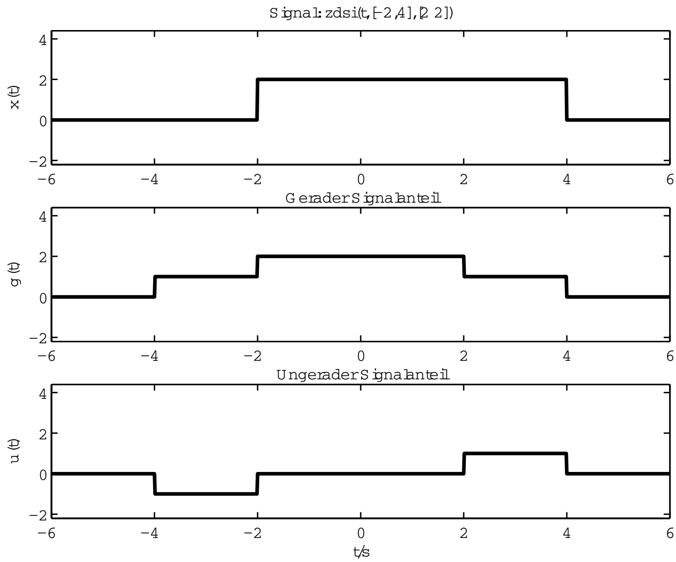

Abbildung 1.5: Zerlegungen eines Pulses

Lassen sich die Zeitpunkte, zu denen jeweils ein Element der Zeitreihe existiert, als $t_n = nT$ darstellen, spricht man von einer *äquidistanten Zeitreihe*. Das Element zur Zeit $t = nT$ heißt $x(nT)$ oder $x(n)$. Die gesamte Zeitreihe ist

$$(x) = (x(-\infty),\ \ldots\ ,\ x(-1),\ x(0),\ x(1),\ x(2),\ \ldots,\ x(\infty)). \tag{1.18}$$

Es werden im Folgenden nur äquidistante Zeitreihen untersucht.

In manchen Fällen werden mehrere Zeitreihen zu einer Matrix zusammengefasst. Man schreibt dann beispielsweise:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & x_1(-2T) & x_1(-T) & x_1(0) & x_1(T) & x_1(2T) & \ldots \\ \ldots & x_2(-2T) & x_2(-T) & x_2(0) & x_2(T) & x_2(2T) & \ldots \\ \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \\ \ldots & x_n(-2T) & x_n(-T) & x_n(0) & x_n(T) & x_n(2T) & \ldots \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

1.4.3 Zeitdiskretes Signal

Nun wird eine *Funktion* gesucht, die als mathematisches Modell für eine Zeitreihe geeignet ist. Diese Funktion muss einige spezielle Eigenschaften haben:

1. Die Funktion muss zu den Zeitpunkten nT den Wert $x(n)$ annehmen.

2. Der Wert zwischen den den Zeitpunkten nT und $(n+1)T$ ist beliebig. Man setzt ihn am besten zu null.

3. Die Funktion muss integrierbar sein.

Die Mathematik stellt für dieses Modell die *Diracsche Deltafunktion* zur Verfügung.

1.4.3.1 Deltafunktion

Die Deltafunktion, auch *Deltaimpuls* genannt, wird durch einen Grenzprozess definiert. Ausgangspunkt der Überlegungen ist die endliche Stoßfunktion:

$$\begin{array}{rcll} & = & 0 & \text{für} \quad t \leq nT - \frac{\tau}{2} \\ I(t-nT,\tau) & = & \frac{1}{\tau} & \text{für} \quad nT - \frac{\tau}{2} \leq t \leq nT + \frac{\tau}{2} \\ & = & 0 & \text{für} \quad t \geq nT - \frac{\tau}{2}. \end{array} \tag{1.20}$$

Die Fläche unter dieser Funktion ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(t-nT,\tau)dt = 1. \tag{1.21}$$

Nun wird eine Folge von Funktionen mit

$$I_m(t-nT,\frac{\tau}{m}) \qquad \text{für} \qquad m = 1,2,4,8,16,\cdots \tag{1.22}$$

definiert, wobei jedes I_m nur noch halb so breit, aber doppelt so hoch wie sein Vorgänger ist. Betrachtet man für diese Funktionenfolge die Grenzfunktion

$$\delta(t-nT) = \lim_{m\to\infty} I_m(t-nT,\frac{T}{m}), \tag{1.23}$$

so erhält man die *Deltafunktion* in der Form

$$\delta(t-nT) = \infty \quad \text{für} \quad t = nT \quad \text{und} \quad \delta(t-nT) = 0 \quad \text{für} \quad t \neq nT. \tag{1.24}$$

Die Abbildung 1.6 zeigt den Anfang des Grenzübergangs.

Der Wert einer Zeitreihe a zur Zeit nT wird somit als Gewicht der Deltafunktion zu diesem Zeitpunkt interpretiert. Nun folgt direkt aus Formel 1.21

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)dt = 1. \tag{1.25}$$

Mit der Deltafunktion lässt sich für ein Element einer Zahlenfolge nun ein mathematisches Modell angeben:

$$x(nT) \sim x(t_n)\delta(t-t_n). \tag{1.26}$$

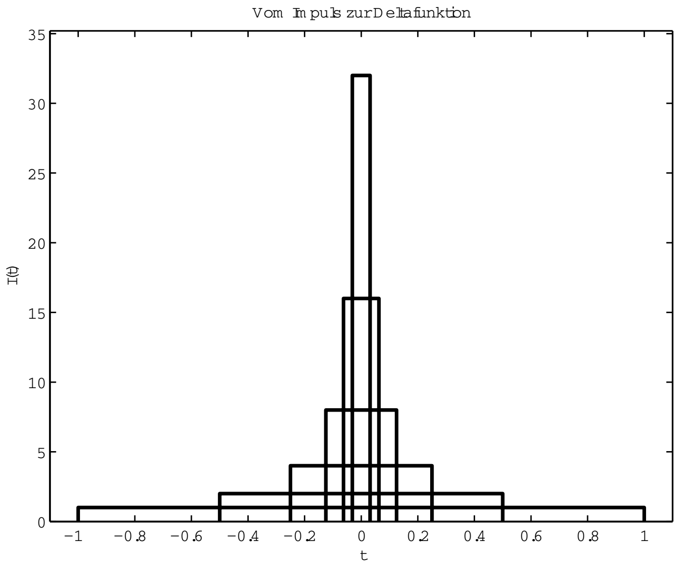

Abbildung 1.6: Grenzübergang

Die Beschränkung auf einen Zeitpunkt entspricht vollständig den vereinfachenden Bildern vom Massepunkt und von der Punktladung in der Physik.

Rechenregeln für Deltafunktionen sind in Tabelle 1.4 zusammengefasst. Aus der Ausblendeigenschaft folgt auch:

$$\begin{aligned} \delta(t-t_1)\cdot\delta(t-t_1) &= \delta(t-t1) \\ \delta(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2) &= 0. \end{aligned} \tag{1.27}$$

1.4.3.2 Darstellung von Zeitreihen durch zeitdiskrete Signale

Wendet man Formel 1.26 auf die äquidistante Zeitreihe nach Formel 1.18 an, so erhält man ein *zeitdiskretes Signal*

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t-nT). \tag{1.28}$$

Ein Sonderfall ist der *Deltapuls*

$$D(t,T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT). \tag{1.29}$$

Ein weiteres wichtiges Signal ist der *Deltaburst*

$$D_b(t,T) = \sum_{n=-u}^{o} \delta(t-nT). \tag{1.30}$$

Tabelle 1.4: Rechenregeln für Deltafunktionen

Bezeichnung	**Beziehung**
Linearität	$a_1\delta(t-nT)+a_2\delta(t-nT)=(a_1+a_2)\delta(t-nT)$
Ausblendeigenschaft	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t-nT)dt = x(n)$
Skalierung	$\delta(\alpha(t-nT)) = \frac{1}{\lvert\alpha\rvert}\delta(t-nT)$
Symmetrie	$\delta(-t)=\delta(t)$

1.4.3.3 Deltaabtastung von zeitkontinuierlichen Signalen

Ist $x(t)$ ein für alle t definiertes zeitkontinuierliches Signal, so kann man auch schreiben:

$$x^*(t) = x(t)\cdot D(t,T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT). \tag{1.31}$$

Man kann sich dann ein zeitdiskretes Signal als *Deltaabtastung* eines zeitkontinuierlichen Signals entstanden denken. Daher nennt man $x^*(t)$ auch *modulierter Deltapuls*.

Einige wichtige deterministische zeitdiskrete Signale, die sich formal durch eine Deltaabtastung entwickeln lassen, sind in Tabelle 1.5 zusammengefasst. Diese Signale sind nicht realisierbar. Sie sind aber als zugeordnete Zahlenfolgen darstellbar. Mit dem Demonstrationsprogramm *sige* kann man determinierte zeitdiskrete Signale erzeugen. Die Abbildung 1.7 zeigt dazu ein Beispiel.

Tabelle 1.5: Deterministische zeitdiskrete Signale

Name	**Beschreibung**
Einheitssprung	$\epsilon^*(t)=\epsilon(t)D(t,T)$
Deltaburst	$D_b(t,T)=\sum\limits_{n=u}^{o}\delta(t-nT)$
Sinussignal	$x^*(t)=Asin(\omega t+\varphi)D(t,T)$
Zeigersignal	$x^*(t)=Ae^{j(\omega t+\varphi)}D(t,T)$

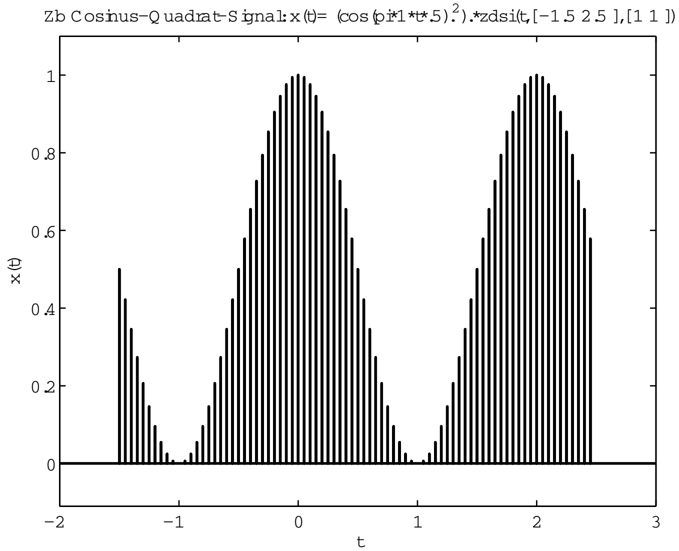

Abbildung 1.7: Beispiel eines zeitdiskreten Signals

Die Beschreibung von Zeitreihen durch zeitdiskrete Signale erlaubt die Übertragung des Energiebegriffes auf Zeitreihen. Aus der Definition für Energiesignale folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)^2 < \infty. \tag{1.32}$$

Es liegt also eine *Energiezeitreihe* vor, wenn die Summe der Quadrate ihrer Elemente endlich ist.

1.5 Stochastische zeitdiskrete Signale

Die hier vorgenommene Beschränkung auf zeitdiskrete stochastische Signale ist aus zwei Gründen vertretbar:

1. Viele Signale sind von ihrem Wesen her zeitdiskret, oder werden durch ihre Erfassung bereits diskretisiert.

2. Die Signalverarbeitung ist in jedem Falle zeitdiskret.

Definiert ist ein zeitdiskretes Signal

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t - nT). \tag{1.33}$$

Zeitdiskrete Signale, deren Abtastwerte $x(n)$ sich nicht aus einem mathematischen Zusammenhang herleiten lassen, bilden eine eigene Signalklasse, die *zeitdiskreten stochastischen Signale*. Sie werden auch *Zufallssignale* genannt. Die Spezifikation *zeitdiskret* wird wenn möglich auch weggelassen. Der Entstehung eines Zufallssignals liegt oft ein *Zufallsexperiment* zugrunde.

Ein Zufallsexperiment kann zeitlich begrenzt oder auch zeitlich unbegrenzt ablaufen. Somit entstehen zeitlich begrenzte oder unbegrenzte Zufallssignale. Zeitlich unbegrenzte Zufallssignale haben *unendliche Energie*.

Die Werte eines Zufallsexperiments, also die einzelnen Werte eines Zufallssignals, nennt man *Zufallsereignisse* oder auch *Elementarereignisse*.

Die zwei bekanntesten Arten zur Erzeugung von Zufallsereignissen sind:

1. *Das Werfen von Münzen*
   Eine Münze kann nach dem Fall entweder die Zahl oder das Wappen zeigen. Diesen Zufallsereignissen ordnet man die Werte 0 oder 1 zu.

2. *Das Werfen eines Würfels*
   Jetzt sind die Zufallsereignisse die Augenzahlen $\{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\}$.

Die Erzeugung dieser Zufallssignale lässt sich *von Hand* nur mit Mühe bewerkstelligen. Will man diesen Vorgang mit einem Rechner nachbilden, so steht man vor einem Problem. Man kann jetzt Zufallsereignisse nur durch ein Programm bilden. Programme können aber nur determinierte Zahlenfolgen generieren. Man suchte daher nach Algorithmen, die sogenannte *Pseudozufallszahlen* erzeugen. Es gibt viele derartige *Zufallszahlengeneratoren*.

1. *Verallgemeinerter Würfel*
   Es lässt sich ein Zufallszahlengenerator als Verallgemeinerung des Würfels erstellen. Während der Spielwürfel sechs Seiten hat, kann man Würfel mit beliebiger Seitenzahl programmieren.

2. *Gleichverteiltes Zufallssignal*
   Hierbei handelt es sich um einen Generator für reelle Zahlen im Bereich $0 \leq x \leq 1$.

3. *Normalverteiltes Zufallsignal*
   Das ist ein Zufallssignal, das man sich beispielsweise als Deltaabtastung der Rauschspannung einer Antenne vorstellen kann.

In einem späteren Kapitel werden einige Algorithmen für die Generierung von Pseudozufallsfolgen näher betrachtet.