

Mathias Hattermann

Der Zugmodus in 3D-dynamischen Geometriesystemen (DGS)

Analyse von Nutzerverhalten und Typenbildung

WISSENSCHAFT



Mathias Hattermann

Der Zugmodus in 3D-dynamischen Geometriesystemen (DGS)

VIEWEG+TEUBNER RESEARCH

Perspektiven der Mathematikdidaktik

Herausgegeben von:

Prof. Dr. Gabriele Kaiser, Universität Hamburg

Prof. Dr. Rita Borromeo Ferri, Universität Kassel

Prof. Dr. Werner Blum, Universität Kassel

In der Reihe werden Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert, die diese Felder empirisch untersuchen, qualitativ oder quantitativ orientiert. Die Publikationen sollen daher auch Antworten zu drängenden Fragen der Mathematikdidaktik und zu offenen Problemfeldern wie der Wirksamkeit der Lehrerbildung oder der Implementierung von Innovationen im Mathematikunterricht anbieten. Damit leistet die Reihe einen Beitrag zur empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik und zu sich daraus ergebenden Forschungsperspektiven.

Mathias Hattermann

Der Zugmodus in 3D-dynamischen Geometriesystemen (DGS)

Analyse von Nutzerverhalten und Typenbildung

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Rudolf Sträßer

VIEWEG+TEUBNER RESEARCH

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Diese Veröffentlichung ist Teil einer Promotion zum Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) durch den Fachbereich Mathematik und Informatik, Physik, Geographie der Justus-Liebig-Universität Gießen (Deutschland), 2011. Die Dissertation wurde unter dem Titel „Explorative Studie zur Hypothesengewinnung von Nutzungsweisen des Zugmodus in dreidimensionalen dynamischen Geometriesoftwaresystemen“ eingereicht.

D 26

1. Auflage 2011

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lektorat: Ute Wrasmann | Britta Göhrisch-Radmacher

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.

Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-1625-2

Geleitwort

Geometrie ist die Lehre vom Raum und von der Form. So konnte im 19. Jahrhundert noch der Gegenstand der Geometrie für jede Frau und jeden Mann umschrieben werden. Mindestens innerhalb der Wissenschaftsdisziplin Mathematik ist diese Beschreibung seit den Forschungen zu nicht-euklidischen Geometrien und der Axiomatisierung der Geometrie durch David Hilbert eher fragwürdig geworden. Vielmehr sah sich die Geometrie bei einem formalistischen Verständnis von Mathematik eher an den Rand gedrängt und spielte folglich in den Bemühungen um eine „Neue Mathematik“ in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts allenfalls eine Nebenrolle. Sie passte nicht in die formale, axiomatische Mathematik. Warum verschwand sie aber nie aus dem Unterricht der allgemeinbildenden Schulen in Deutschland? Ich denke, weil sie eben immer auch noch die Lehre von Raum und Form war und ist – und weil sie dafür gebraucht wird, Dinge und Verhältnisse des täglichen Lebens, aber auch der komplizierten technisch geprägten Gesellschaft unserer Tage zu beschreiben, zu planen und kontrollieren. Und dabei ist dann die Gebrauchsgometrie meistens nicht wie die Schulgeometrie zwei-, sondern eben dreidimensional, eine echt räumliche Geometrie.

So war es dann nicht verwunderlich, dass nach Software-Systemen für die ebene Geometrie, insbesondere den dynamischen Geometrie-Systemen für die ebene Geometrie, auch dynamische Geometrie-Systeme für räumliche Geometrie geschaffen wurden. Allerdings wusste und weiß die Didaktik der Geometrie in deutscher Sprache zwar seit langem aus der Ausbildung für technische Zeichnerinnen und Zeichner, dass räumliche Geometrie durchaus schwer zu lehren und lernen ist. Aber man konnte ja hoffen, dass die optimistischen Einschätzungen bzgl. ebener dynamischer Geometrie-Software auf räumliche Geometrie-Systeme übertragbar sind.

Genau hier setzt die vorliegende Arbeit von Mathias Hattermann an: In detailliert dokumentierten empirischen Studien geht er der Frage nach, ob und inwieweit Studierende, die bereits eine Ausbildung sowohl in ebener Geometrie als auch in der Nutzung entsprechender Software-Systeme haben, einfache Fragestellungen aus der räumlichen Geometrie mit den vorhandenen

für die Raumgeometrie geschaffenen dynamischen Software-Systemen bearbeiten können und ob ihnen dabei ihre Vorerfahrungen aus der Arbeit mit ebenen dynamischen Software-Systemen helfen. Gleichzeitig erhalten wir in diesen Studien einen Einblick in das Raumvorstellungsvermögen dieser jungen Erwachsenen, die im Vergleich zu ihren Altersgenossen ein relativ entwickeltes Geometrie-Verständnis haben. Die sorgfältig dokumentierten Untersuchungen und Ergebnisse der Arbeit von Mathias Hattermann zeigen allerdings, dass es den Studierenden nicht umstandslos gelingt, ihre Erfahrungen und Kenntnisse aus der ebenen Geometrie und der Nutzung entsprechender Software auf die räumlichen Fragestellungen und Software-Systeme zu übertragen. Offensichtlich erfordern auch so intuitive Software-Systeme wie *Cabri-3D* und/oder *Archimedes Geo3D* immer noch eine explizite Anleitung und auch gewisse Übung, bevor sie problemlos und aufgabengerecht benutzt werden können.

Wenn Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker wie auch Lehrerinnen und Lehrer diese Botschaft aus der Dissertation von Mathias Hattermann mitnehmen, so haben sie über die innovativen Aufgabenstellungen in der Arbeit hinaus wesentliche Erkenntnisse gewonnen. Diese Erkenntnis möchte man auch Verantwortlichen in der Schulverwaltung wünschen, damit die Lehre von Raum und Form in den Bildungsstandards nicht nur als „Leitidee“ genannt wird, sondern auch einen angemessenen Platz im Mathematikunterricht der allgemeinbildenden Schulen findet. Die vorliegende Arbeit kann hier eine gut dokumentierte und aspektreiche Argumentationshilfe sein. Lehrerinnen und Lehrer werden darüber hinaus Anregungen für ihren Unterricht in räumlicher Geometrie erhalten, während Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker auch an den Methoden der Dokumentation und Analyse der Problemlösungen der Studierenden interessiert sein werden.

Danksagung

Die Entscheidung für die Durchführung eines Dissertationsvorhabens geschieht zu einem Zeitpunkt, zu dem die wenigsten Promovierenden wissen, was sie erwartet und wie die weitere Entwicklung vorangehen wird. So erging es auch mir. Man begibt sich auf einen spannenden aber undurchsichtigen Weg mit verschwommen erscheinendem Ziel, dessen weitere Begehung ab und an doch mühsam ist. Gelegentlich begegnet man auf diesem Weg auch steileren Passagen, manchmal sogar Bergen, bei deren Erreichen folgende Meldung des Routenplaners zu vernehmen ist: „Es konnte keine Ausweichroute berechnet werden!“ In solchen Situationen bedarf es der Motivation bzw. konkreten Hilfe von Menschen, denen ich für ihre Unterstützung in den letzten Jahren sehr dankbar bin.

Besonderer Dank gebührt meinem Doktorvater, Herrn Rudolf Sträßer, mit dessen professioneller Unterstützung ich zu jeder Zeit des Projektes rechnen konnte und dessen Ratschläge bzw. Hinweise mir immer einen Weg wiesen.

Ebenso gilt mein Dank Frau Colette Laborde, die sich für die Durchführung eines vierwöchigen Forschungsaufenthaltes an der *Université Joseph-Fourier* in Grenoble für mich einsetzte und darüber hinaus bereit war, als Zweitgutachterin zu fungieren. Herzlichen Dank dafür!

Frau Angela Restrepo danke ich für die vielen Stunden in Grenoble, welche sie mit mir teilte und die Diskussionen über den Einsatz dynamischer Geometrie, derer sie nie müde wurde.

Einen weiteren Forschungsaufenthalt an der *University of Bristol* ermöglichte mir Frau Rosamund Sutherland, der ich für ihr Engagement und ihre Zeit danken möchte.

Frau You-Wen Allison Lu bin ich für die Einladung nach Cambridge und den wissenschaftlichen Austausch ebenfalls zu Dank verpflichtet.

Allen Kollegen des Gießener Institutes danke ich an dieser Stelle herzlich für die immer sehr kollegiale Arbeitsatmosphäre, die anregenden Gespräche und die Unterstützung, die ich während der gesamten Zeit erfahren durfte.

Meinem neuen Chef, Herrn Rudolf vom Hofe, danke ich für die mir zugestandenen Freiräume zur endgültigen Fertigstellung der Dissertation.

Allen Probanden, ohne deren Bereitschaft dieses Dissertationsprojekt nicht hätte durchgeführt werden können, soll mein Dank an dieser Stelle nicht vorenthalten bleiben.

Auch im privaten Umfeld konnte ich viel Interesse an meiner Arbeit und Unterstützung erfahren, sodass auch meinen engen Freunden ein besonderer Dank gebührt.

Ich danke Frau Janine Weigel für ihre konstruktiven kritischen Anmerkungen und Kommentare zu meinen Ideen, zudem für ihr Verständnis hinsichtlich der ihr entgangenen Zeit aufgrund meiner Arbeit in den vergangenen Monaten.

Frau Christina Collet danke ich für die aufbauenden Gespräche und ihre Motivation zur Aufrechterhaltung der seit langem bestehenden Fernfreundschaft.

Danken möchte ich ebenso Frau Nina Kawasaki, die mir in den letzten Jahren immer eine feste Stütze war und deren außergewöhnliche Persönlichkeit und rebellische Art mir immer wieder imponieren.

Herrn Marius Sappok danke ich für seine Bereitschaft, welche von Zeit zu Zeit bis in die frühen Morgenstunden in Anspruch genommen werden musste, um die ein oder andere bedeutende Frage des Lebens ausführlich mit einem Mathematiker zu diskutieren.

Ebenso danke ich den Familien Pawusch, Rivera und Scheerer für die lange Freundschaft und Unterstützung bei vielen Angelegenheiten des täglichen Lebens.

Der größte Dank gilt meinen Eltern, die mir jederzeit die Freiheit gewährten, meinen eigenen Lebensweg zu gehen, auch wenn dieser für sie persönlich mit Nachteilen verbunden gewesen sein mag. Auf ihre Unterstützung konnte ich immer uneingeschränkt zählen. Vielen Dank dafür!

Gießen im Januar 2011

Mathias Hattermann

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	XV
Tabellenverzeichnis	XVII
1 Motivation und Forschungsfrage	1
2 Theoretische Hintergründe	9
2.1 Instrumenteller Ansatz nach Rabardel	9
2.1.1 Unterscheidung von Zeichnung und Figur	20
2.2 Geometrie und die Entwicklung von Werkzeugen	20
2.3 Dynamische Geometriesysteme	23
2.3.1 Definierende Eigenschaften	25
2.3.2 Mathematische Sicht auf dynamische Geometriesysteme	26
2.3.3 Forschungsergebnisse zum Zugmodus in der Ebene . . .	31
2.3.4 Forschung in 2D-Systemen	40
2.3.5 Erste Ergebnisse in 3D-Systemen	42
3 Methodologie	43
3.1 Quantitative und qualitative Forschung	44
3.1.1 Gegenseitige Kritik der Forschungsparadigmen	46
3.2 Charakterisierung qualitativer Forschung	49
3.3 Theorie qualitativer Forschung	55
3.4 Grounded Theory	57
3.4.1 Kritik der Grounded Theory	60
3.5 Gütekriterien qualitativer Forschung	61
3.6 Typenbildung in der qualitativen Sozialforschung	64
3.6.1 Der Prozess der Typenbildung	66
3.7 Problem der Übertragung auf mathematikdidaktische Fragestellungen	68
3.8 Methodologie des konkreten Forschungsverlaufs	69
3.8.1 Forschungsdesign	69

3.8.2	Konkrete Untersuchungsverfahren	70
3.9	Kritische Betrachtung der gewählten Methodologie	74
4	Studie 1	79
4.1	Methodologie und Forschungsfragen von Studie 1	79
4.2	A priori Analyse der Aufgaben	83
4.2.1	Aufgabe 1: Würfelkonstruktion	84
4.2.2	Aufgabe 2: Verifikation von Würfelschnitten	86
4.2.3	Aufgabe 3: Abstand windschiefer Geraden	87
4.2.4	Aufgabe 4: Paraboloidkonstruktion	90
4.3	Ergebnisse von Studie 1	94
4.3.1	Ergebnisse von Aufgabe 1: Würfelkonstruktion	94
4.3.2	Kurzinterpretation zu Aufgabe 1	95
4.3.3	Ergebnisse von Aufgabe 2: Würfelschnitte	96
4.3.4	Kurzinterpretation zu Aufgabe 2	100
4.3.5	Ergebnisse von Aufgabe 3: Abstand windschiefer Geraden	102
4.3.6	Kurzinterpretation zu Aufgabe 3	103
4.3.7	Ergebnisse von Aufgabe 4: Paraboloidkonstruktion . .	104
4.3.8	Kurzzusammenfassung erster Ergebnisse	104
4.4	Weiterer Forschungsverlauf	106
5	Studie 2	109
5.1	Methodologie und Forschungsfragen von Studie 2	109
5.2	Vorbereitende Sitzung zu Archimedes Geo 3D	113
5.2.1	Thematisierung grundlegender Werkzeugkompetenzen .	113
5.2.2	Schwarze Boxen (1)	117
5.3	Vorbereitende Sitzung zu Cabri 3D	119
5.3.1	Thematisierung grundlegender Werkzeugkompetenzen .	119
5.3.2	Schwarze Boxen (2)	122
5.4	A priori Analyse der Aufgaben	125
5.4.1	Aufgabe 1: Würfelkonstruktion	125
5.4.2	Aufgabe 2: Auffinden von Würfelschnitten	126
5.5	Ergebnisse von Studie 2	127
5.5.1	Ergebnisse von Aufgabe 1: Würfelkonstruktion	127
5.5.2	Analyse der Einzelgruppen von Aufgabe 1	131
5.5.3	Verwendungsweisen des Zugmodus in Aufgabe 1	138
5.5.4	Auffälligkeiten der Bearbeitungen von Aufgabe 1	139
5.5.5	Konsequenzen aus Aufgabe 1	140
5.5.6	Ergebnisse von Aufgabe 2: Auffinden von Würfelschnitten	141
5.5.7	Analyse der Einzelgruppen von Aufgabe 2	143
5.5.8	Verwendungsweisen des Zugmodus in Aufgabe 2	155

5.5.9	Auffälligkeiten der Bearbeitungen von Aufgabe 2	157
5.5.10	Konsequenzen aus Aufgabe 2	158
5.6	Qualitativer Vergleich zu Ergebnissen aus Studie 1	159
5.7	Reflexion der Ergebnisse auf theoretischer Ebene	160
5.7.1	Definition neuer Zugmodi	162
5.7.2	Klassifikation von Verwendungsweisen des Zugmodus in Aufgabe 1	164
5.7.3	Klassifikation von Verwendungsweisen des Zugmodus in Aufgabe 2	164
5.7.4	Verwendungsweisen des Zugmodus in Studie 2	165
5.8	Weiterer Forschungsverlauf	166
6	Theoretische Basis für Studie 3	169
6.1	Grundlegende Definitionen für 3D-Umgebungen	169
6.2	Vorläufiges Kategoriensystem	171
6.2.1	Definition von Komplexitätsstufen	171
6.2.2	Definition von Artefakteinschränkungen	174
6.2.3	Definition von Verwendungsweisen des Zugmodus	175
6.3	Erweiterungen des vorhandenen Kategoriensystems	179
6.3.1	Erweiterung der Komplexitätsstufen	179
6.3.2	Erweiterung der Artefakteinschränkungen	180
6.3.3	Erweiterung der Verwendungsweisen des Zugmodus	181
6.4	Endgültiges Kategoriensystem für Studie 3	181
7	Studie 3: Ablauf	183
7.1	Methodologie und Forschungsfragen von Studie 3	183
7.2	Themen und Ablauf des Seminars	190
7.2.1	Einführungsveranstaltung zum Seminar	191
7.2.2	Einführung in <i>Cabri 3D</i> und theoretische Grundlagen I (Ha)	193
7.2.3	Einführung in <i>Cabri 3D</i> und theoretische Grundlagen II (Ha)	195
7.2.4	Untersuchung Nummer 1 (Ha)	196
7.2.5	Die Zentralprojektion in Cabri 3D (BW)	198
7.2.6	Die Parallelprojektion in Cabri 3D (Ha)	198
7.2.7	Platonische Körper und ihre Netze (BF)	201
7.2.8	Mentale Rotationen (AL)	203
7.2.9	Untersuchung Nummer 2 (Ha)	204
7.2.10	Würfelgebäude à la <i>BAUWAS</i> (DK1)	204
7.2.11	Schulbücher der Sekundarstufe I und Raumgeometrie (FH)	204

7.2.12	Experimentelles Lösen raumgeometrischer Berechnungsaufgaben (DK2)	207
7.2.13	Kegelschnittkonstruktionen und Dandelinische Kugeln (Ha)	209
7.2.14	Untersuchung Nummer 3 (Ha)	210
7.3	A priori Analyse der Aufgaben	210
7.3.1	Erste Untersuchung 3(1)	211
7.3.2	Zweite Untersuchung 3(2)	216
7.3.3	Dritte Untersuchung 3(3)	223
8	Studie 3: Auswertung (1)	231
8.1	Quantitative Analyse der Konstruktionsaufgaben	234
8.1.1	Aufgabe II: Tetraederkonstruktion	234
8.1.2	Aufgabe III: Oktaederkonstruktion	238
8.1.3	Aufgabe V: Würfelkonstruktion	241
8.1.4	Quantitativer Vergleich der Konstruktionsaufgaben	243
8.2	Qualitative Analyse der Konstruktionsaufgaben	247
8.2.1	Qualitative Analyse des Datenmaterials von Aufgabe II: Tetraederkonstruktion	247
8.2.2	Qualitative Analyse des Datenmaterials von Aufgabe III: Oktaederkonstruktion	251
8.2.3	Qualitative Analyse des Datenmaterials von Aufgabe V: Würfelkonstruktion	255
8.2.4	Fazit der qualitativen Betrachtungen	258
8.3	Darstellung des Typisierungsprozesses	261
8.3.1	Erarbeitung relevanter Vergleichsdimensionen	261
8.3.2	Gruppierung und Analyse von Regelmäßigkeiten	267
8.3.3	Analyse inhaltlicher Zusammenhänge und Reduktion des Merkmalsraums	268
8.3.4	Charakterisierung der gebildeten Typen	269
9	Studie 3: Auswertung (2)	273
9.1	Quantitative Analyse der explorativen Aufgaben	273
9.1.1	Aufgabe I: Schwarze Boxen	273
9.1.2	Aufgabe IV: Schnittfiguren von Doppelkegel und Würfel	277
9.1.3	Aufgabe VI: Schnittfiguren von Würfel und Ebene	280
9.1.4	Quantitativer Vergleich der explorativen Aufgaben IV und VI	283
9.2	Qualitative Analyse der explorativen Aufgaben	286

9.2.1	Qualitative Analyse des Datenmaterials von Aufgabe I: Schwarze Boxen	286
9.2.2	Qualitative Analyse des Datenmaterials von Aufgabe IV: Kegelschnitte	289
9.2.3	Qualitative Analyse des Datenmaterials von Aufgabe VI: Würfelschnitte	294
9.3	Darstellung des Typisierungsprozesses	299
9.4	Diskussion der Sättigung von Kategorien	306
10	Aufgabenübergreifende Typologie	307
10.1	Empirische Basis	307
10.1.1	Auswertungen der Gruppe AL	308
10.1.2	Auswertungen der Gruppe BF	311
10.1.3	Auswertungen der Gruppe BW	314
10.1.4	Auswertungen der Gruppe DK1	317
10.1.5	Auswertungen der Gruppe DK2	320
10.1.6	Auswertungen der Gruppe FH	323
10.2	Formulierung einer Nutzertypologie	326
10.2.1	Stellung von formaler Theorie innerhalb der Grounded Theory	326
10.2.2	Aufgabenunabhängige materiale Typologie	327
10.2.3	Aufgabenunabhängige abstrakte Typologie	332
11	Fazit	337
11.1	Zusammenfassung von Ergebnissen	337
11.2	Praxisrelevanz für Lehrende	342
11.3	Ideen für konzeptionelle Entwicklungen	348
11.4	Zukünftige Fragestellungen	349
	Literaturverzeichnis	353
	Anhang	371

Abbildungsverzeichnis

1	Stetiges und deterministisches Verhalten von DGS (1)	30
2	Stetiges und deterministisches Verhalten von DGS (2)	30
3	Instrumente als Vermittler zwischen Theorie und Wahrnehmung	34
4	Hierarchie von auftretenden Zugmodi in 2D-DGS	37
5	Ablaufmodell induktiver Kategorienbildung nach Mayring . . .	78
6	Mögliche Würfelkonstruktionen	85
7	Mögliche Schnittfiguren	88
8	Abstandsbestimmung zweier windschiefer Geraden	91
9	Ortslinienkonstruktion der Parabel	92
10	Konstruktion eines Paraboloids mithilfe der Ortsflächenfunktion bzw. des Spurmodus	93
11	Das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck als scheinbare Schnittfigur von Ebene und Würfel in <i>Cabri 3D</i>	98
12	Abstand windschiefer Geraden in <i>Archimedes Geo3D</i>	113
13	Schwarze Boxen 1 und 2 in <i>Archimedes Geo3D</i>	118
14	Schwarze Boxen 3 und 4 in <i>Archimedes Geo3D</i>	120
15	Abstand windschiefer Geraden in <i>Cabri 3D</i>	121
16	Informationsverlust bei Projektion	122
17	Lösungen zu den Übungen der Einführungsveranstaltung . . .	123
18	Aufgabenstellung und Lösung der fünften Schwarzen Box . . .	124
19	Mögliche Schnittfiguren eines Würfels mit einer Ebene	128
20	Weitere Schnittfiguren eines Würfels mit einer Ebene	129
21	Datenauswertung mit der Software <i>Videograph</i>	186
22	Veranschaulichung der Zugmodusfunktion am <i>Cabri-Auto</i> . . .	192
23	Abstand windschiefer Geraden	193
24	Mögliche Pflasterung der x - y -Ebene mit gleichseitigen Dreiecken	197

25	Mögliche Pflasterung einer Lotebene zur x - y -Ebene mit gleichseitigen Dreiecken	197
26	Konstruktion eines gedrehten Achtecks in eine zuvor festgelegte zur x - y -Ebene lotrecht stehende Ebene	198
27	Konstruktion eines unter Verwendung des Zugmodus invarianten Schneemanns	199
28	Zentralprojektives Bild eines Würfels	200
29	Parallelprojektives Bild eines Würfels mit beweglichem Referenzstrahl und variabler Lage der Projektionsfläche	201
30	Konstruktionen dualer Körper	202
31	Faktoren des räumlichen Vorstellungsvermögens nach Maier	203
32	Identifikation eines Körpers in <i>Cabri 3D</i>	205
33	Screenshot der Softwareumgebung <i>BAUWAS</i>	206
34	Würfelstandebene in <i>Cabri 3D</i>	206
35	Aufgaben zur Implementierung von Übungsmodulen der Software <i>BAUWAS</i> in <i>Cabri 3D</i>	207
36	Lösung der raumgeometrischen Schulbuchaufgabe	208
37	Beispiel einer M-Berechnungsaufgabe nach Schumann	209
38	Dandelinische Kugeln für die Ellipsen- und Parabelkonstruktion	210
39	Erste und zweite Schwarze Box in <i>Cabri 3D</i>	213
40	Dritte Schwarze Box in <i>Cabri 3D</i>	214
41	Vierte Schwarze Box in <i>Cabri 3D</i>	215
42	Fünfte Schwarze Box in <i>Cabri 3D</i>	216
43	Mögliche Lösung der Tetraederkonstruktion	217
44	Mögliche Lösung der Oktaederkonstruktion	219
45	Entartete Schnittfiguren von Doppelkegel und Ebene	224
46	Nichtentartete Schnittfiguren von Doppelkegel und Ebene	225
47	Mögliche Lösung der Würfelkonstruktion	226
48	Schnittfiguren eines Würfels mit einer Ebene (1)	228
49	Schnittfiguren eines Würfels mit einer Ebene (2)	229
50	Möglichkeiten der Lotgeradenkonstruktion	344
51	Einfluss von gerundeten Messungen	346

Tabellenverzeichnis

1	Übersicht: Würfelkonstruktion aus Studie 1	94
2	Übersicht: Würfelschnitte aus Studie 1	97
3	Übersicht: Abstand windschiefer Geraden	103
4	Übersicht: Würfelkonstruktion aus Studie 2	130
5	Übersicht: Würfelschnitte aus Studie 2	141
5	Übersicht: Würfelschnitte aus Studie 2	142
6	Ablauf des Seminars <i>Raumgeometrie mit dynamischer Geometriesoftware</i>	190
7	Aufgabe II: Tetraederkonstruktion	235
8	Aufgabe III: Oktaederkonstruktion	238
9	Aufgabe V: Würfelkonstruktion	241
10	Vergleich der Konstruktionsaufgaben II, III, V über 5 Prozent (1)	244
11	Vergleich der Konstruktionsaufgaben II, III, V über 5 Prozent (2)	245
12	Entwicklung von Gruppenkompetenzen in Konstruktionsaufgaben	260
13	Bearbeitungsgeschwindigkeit der Gruppen	262
14	Prozentuale Verwendungszeiten des Zugmodus	263
15	Anzahl verschiedener verwandter Zugmodi	264
16	Mögliche Vergleichsdimensionen zur Typisierung bei Konstruktionsaufgaben	265
17	Gruppen als Punkte im Merkmalsraum M^6	268
18	Nutzertypologie \mathcal{T}_K für Konstruktionsaufgaben	270
19	Auswertungen Aufgabe I: Schwarze Boxen	274
20	Auswertungen Aufgabe IV: Kegelschnitte	277
21	Auswertungen Aufgabe VI: Würfelschnitte	280

22	Vergleich der explorativen Aufgaben IV und VI	285
23	Identifizierte Schnittfiguren von Doppelkegel und Ebene	290
24	Identifizierte Schnittfiguren von Würfel und Ebene	294
25	Bearbeitungsmerkmale: Schwarze Boxen	300
26	Bearbeitungsmerkmale der Kegelschnittaufgabe IV	301
27	Nutzertypologie $\mathcal{T}_{E,Kegel}$ der Kegelschnittaufgabe	302
28	Bearbeitungsmerkmale der Würfelschnittaufgabe VI	303
29	Nutzertypologie $\mathcal{T}_{E,Würfel}$ der Würfelschnittaufgabe	305
30	Auswertungen der Gruppe AL	309
31	Auswertungen der Gruppe BF	312
32	Auswertungen der Gruppe BW	315
33	Auswertungen der Gruppe DK1	318
34	Auswertungen der Gruppe DK2	321
35	Auswertungen der Gruppe FH	324
36	Nutzertypologie \mathcal{T}_K für Konstruktionsaufgaben	328
37	Nutzertypologie $\mathcal{T}_{E,Kegel}$ der Kegelschnittaufgabe	329
38	Nutzertypologie $\mathcal{T}_{E,Würfel}$ der Würfelschnittaufgabe	329

1 Motivation und Forschungsfrage

An dieser Stelle wird die Motivation für das durchgeführte Forschungsvorhaben dargelegt und die Bedeutung der Beschäftigung mit dem Forschungsgegenstand der dynamischen Geometriesoftwaresysteme erläutert. Zunächst ist die wachsende Bedeutung von *Informations- und Kommunikationstechnologie*¹ bzw. digitalen Medien zu nennen, welche einen immer größeren Raum im Alltag und ebenso im täglichen Unterricht einnehmen (vgl. Müller [2006], Ruthven et al. [2004]), zur historischen Entwicklung von technologischen Hilfsmitteln vgl. Schubring [2010]. So sind in allen Altersstufen, den verschiedensten Schulformen und Unterrichtsfächern digitale Medien etabliert, welche ein effizientes Lernen zum Ziel haben, das sie jedoch nicht immer erreichen. Bereits für Kinder im Vorschulalter arbeiten Forscher², Pädagogen und Softwareentwickler an Ideen, Anforderungen, Möglichkeiten und Konzeptionen von Lernprogrammen, die auf das Lernen, speziell das mathematische Lernen, abzielen. Einen interessanten Überblick über die aktuelle Forschungslage im Bereich der Förderung von mathematischen Kompetenzen mithilfe von digitalen Technologien bei Kindern im Vorschulalter findet sich in Eagle et al. [2008]. Darüber hinaus kommen Kinder nahezu aller Altersstufen im schulischen wie im privaten Bereich bereits mit Computersoftware in Berührung und müssen sich in Computerumgebungen zurecht finden.

Alleine aus diesem Grund ist es bereits von Bedeutung, relativ neue Medien didaktisch-wissenschaftlich zu untersuchen, um so die Handhabung, Einflüsse auf kognitive Entwicklungen, Möglichkeiten der Anwender und zukünftige Softwarekonzeptionen besser beurteilen zu können. Mithilfe dieser Erkenntnisse lassen sich im Idealfall verbesserte Lernumgebungen generieren, welche kommenden Schülergenerationen von Nutzen sein werden.

¹ Die Abkürzung *ICT* ist in diesem Zusammenhang gebräuchlich.

² Zum Zweck der leichteren Lesbarkeit wird im gesamten Text die maskuline Form für Personen verwandt, falls nicht explizit erwähnt, sind alle Aussagen stets auf beide Geschlechter bezogen.

Digitale Medien erlauben neue Zugänge in nahezu allen Bereichen der Schulmathematik, von der Vorschule bis hin zur Sekundarstufe II, ja sogar der Hochschulmathematik, sodass sich zunächst die Frage stellt, ob Softwareumgebungen zur Algebra, Analysis, Geometrie oder Stochastik untersucht werden sollen.

Die Geometrie stellt ein Hauptfeld für das Erlernen des Problemlösens dar und dient des Weiteren als Paradebeispiel einer mathematischen Disziplin, in der verschiedenste mathematische Strukturen aufzufinden sind. Die Geometrie verkörpert einerseits die Umsetzung einer streng deduktiven Theorie auf mathematischer Ebene und erweist sich andererseits als Lehre des umgebenden Raumes von tragender Bedeutung für das tägliche Leben und Handeln, vgl. hierzu Holland [2007, S. 19ff.].

Daher ist die Raumgeometrie eines der entscheidenden Bindeglieder zwischen dem konkreten Erfahrungsraum des Menschen und der wissenschaftlichen Disziplin der Mathematik. So lassen sich Erkenntnisse und Gegebenheiten an Alltagsgegenständen und Vorstellungen verifizieren bzw. falsifizieren, um so auch Fähigkeiten, das räumliche Denken betreffend, zu schulen.

„Perhaps the commonest expression of spatial ability is in orientation in space - the sense of direction. We all must learn to find our way about, first in our own surrounds, then in new places.“
[Harris, 1978, S. 410]

Zur Förderung der von Harris genannten Fähigkeiten ist der Beitrag des aktuellen Forschungsvorhabens darin zu sehen, den Zugang zu den Phänomenen des dreidimensionalen Raums mit relativ neu zur Verfügung stehenden Technologien zu untersuchen, um mehr über Schwierigkeiten und Möglichkeiten der aktuellen Software zu erfahren. Die Analyse von zu entwickelnden Werkzeugkompetenzen und das Verhalten von Probanden in Computerumgebungen ist im schulischen Bereich ebenso interessant wie erfolgversprechend. Aus diesem Grund steht das Forschungsinteresse bezüglich des Erlernens von Werkzeugkompetenzen zur adäquaten Benutzung (neuer) Medien im Einklang mit bereits bestehenden Strömungen der didaktischen Forschung, vgl. hierzu Drijvers & Trouche [2008], Rezat [2009] und Trouche [2003].

Nach Überzeugung des Autors bieten dreidimensionale-dynamische Geometriesoftwaresysteme, im Folgenden mit 3D-DGS abgekürzt, ein hohes Maß an Anschaulichkeit und Motivation für zukünftige Nutzer und besitzen das Potential, dem vernachlässigten Thema der Raumgeometrie an deutschen Schulen neue Impulse zu verleihen. Die Forderung von Lehrplänen nahezu aller Schulformen war seit jeher, das räumliche Vorstellungsvermögen zu thematisieren.

„Raumvorstellung ist eine menschliche Qualifikation, der wegen ihrer lebenspraktischen Bedeutung mit Recht im Unterricht große Aufmerksamkeit gewidmet wird. Jedenfalls formulieren die Richtlinien unserer Bundesländer ausnahmslos Raumvorstellung als ein allgemeines Lernziel für den Mathematikunterricht.“

[Besuden, 1990, S. 461]

Diese Forderung erfährt mit der vertieften Auseinandersetzung mit der Geometrie und der Arbeit mit 3D-Programmen neue Möglichkeiten der Umsetzung, wobei man sich auch Verbesserungen bei der Bearbeitung von raumgeometrischen Fragestellungen in Intelligenztests erhofft. In Faktorenmodellen zum Aufbau und zur Struktur der menschlichen Intelligenz findet sich immer ein Faktor „Space“, der oft unterschiedlich beschrieben und meist sogar differenzierter dargestellt wird. Erste Arbeiten hierzu finden sich bei Thurstone [1938, 1949, 1950], für eine Zusammenfassung und weitere Entwicklungen vgl. Maier [1999, S. 17ff.]. Aus diesem Grund ist eine wissenschaftliche Auseinandersetzung mit Teilen dieser Materie lohnenswert und sinnvoll, diesbezüglich kann der folgenden Argumentation von Ulshöfer zugestimmt werden:

„Niemand kann redlich behaupten, er fördere die Intelligenz seiner Schüler nach bestem Wissen und Vermögen, wenn er das Raumanschauungsvermögen vergisst.“

[Ulshöfer, 1986, S. 74]

Leider war seit jeher die Raumgeometrie in Grund- und weiterführenden Schulen, trotz der expliziten Erwähnung in den Lehrplänen, das Stiefkind des Mathematikcurriculums.

„Geometrieunterricht – insbesondere räumliche Geometrie – führt in den meisten Grundschulen nur ein Schattendasein.“

[Kessler, 1989, S. 1]

Dies ist wohl darin begründet, dass die Raumgeometrie außerhalb der reinen Vorstellung und expliziten im Raum vorhandenen Gegenständen nur über konkrete Modelle zugänglich ist. Modelle sind umständliche Gebilde, sie müssen gesucht bzw. hergestellt, transportiert, aufgestellt bzw. ausgeteilt werden. Sie sind von großem Nutzen, der hier keineswegs in Frage gestellt werden soll, jedoch fällt ihre Verwendung oft der Bequemlichkeit, Zeitnot oder dem einfachen Nichtvorhandensein zum Opfer.

Mithilfe der neuen dynamischen Geometriesoftwareprogramme eröffnen sich neue Möglichkeiten, die Raumgeometrie zu lehren. Viele erfolgversprechende Anregungen von dreidimensionalen Problemstellungen, welche auch im Unterricht Verwendung finden können, sind bei Schumann [2007] nachzulesen.

Wie erfolgreich und mit welchem Gehalt das Unterrichten von raumgeometrischen Fragestellungen mit der zur Verfügung stehenden Software möglich sein wird, muss die Zukunft zeigen, obwohl im Bereich der 2D-Geometrie bereits gute Vorarbeiten geleistet wurden, vgl. hierzu Hölzl [1994, 1995]. Die „Royal Road zur Geometrie“ (vgl. Heilbron [2003, S. 41]) ist, um mit den immer noch gültigen Worten Euklids zu sprechen, aufgrund der bloßen Erfindung von dynamischen Geometriesoftwaresystemen bestimmt noch nicht gefunden. Eine Aussage, die durch folgendes Zitat bekräftigt wird:

„A lot of analytic and constructive work is still to be done to make use of DGS a success story in teaching and learning mathematics, especially Geometry.“
[Sträßer, 2002, S. 65]

Zur Verwendung und Benutzung eines jeden Mediums ist eine gewisse „Werkzeugkompetenz“ von Nöten, welche es dem Nutzer erlaubt, mit dem Medium zu interagieren und eine Software adäquat zu bedienen. Gerade eine mehr oder weniger ausgeprägte Werkzeugkompetenz unterscheidet Laien von erfahrenen Benutzern in einer bestimmten Softwareumgebung bzw. der Handhabung eines speziellen Mediums allgemein. Aus diesem Grund ist die Untersuchung der Entwicklung von Werkzeugkompetenzen bzw. die deskriptive Beschreibung von vorliegenden Verwendungsweisen eines Werkzeugs eine bedeutende Aufgabe, der bei der Erforschung von speziellen Werkzeugkompetenzen in 3D-Systemen in der vorliegenden Dissertation nachgegangen wird.

3D-dynamische Geometriesysteme stellen zudem ein nahezu unerforschtes Gebiet der Mathematikdidaktik dar, in dem gerade die Verknüpfung von neuer Technologie, die Analyse von Werkzeugkompetenzen und der wohl ältesten mathematischen Disziplin, der Geometrie, ein spannendes Forschungsfeld generiert. Explizit werden in jüngster Zeit Forderungen von Mathematikdidaktikern laut, welche Langzeituntersuchungen mit dynamischen Geometriesystemen fordern. Zudem ist der Einfluss von 3D-Systemen auf geometrische Konzeptualisierungen von Lernern ein Anliegen der mathematikdidaktischen Forschung, was auch Hollebrands, Laborde & Sträßer [2008, S. 191] bekräftigen:

- „There is not yet a critical amount of research devoted to long-term teaching with regular use of DGS. Moreover, there is currently a lack of computer-supported geometry teaching. The situation may be changing, however, since researchers are beginning to conduct long-term experimental teaching based on the regular use of DGS.“

- There is a need for research on the impact of such a long-term use of a DGS on the nature of students' geometric conceptions.
- There is a need for research on how DGS (or other computer-supported teaching and learning) may affect the learning of 3D-geometry.“

Es ist unbestritten, dass der *Zugmodus* die entscheidende und bedeutendste Funktion in dynamischen Geometriesystemen darstellt, da er die dynamische Geometrie von der statisch geprägten Geometrie des Euklid unterscheidet. Die verschiedenen Funktionen des Zugmodus und das Erlernen seiner Handhabung ist jedoch bereits in 2D-Umgebungen alles andere als einfach, wie Restrepo in ihrer Untersuchung in einer 2D-Umgebung³ bestätigt:

„La genèse instrumentale du déplacement est un processus long et complexe et demande une mise en place organisée sur le long terme.“

[Restrepo, 2008, S. 247]

Als eine der fundamentalen Grundeigenschaften von dynamischer Geometriesoftware, gilt dem Zugmodus in 3D-Systemen besonderes Interesse. Als recht gut erforschtes Gebiet der Mathematikdidaktik gelten 2D-Systeme, wobei Studien zum Zugmodus ebenfalls bereits durchgeführt wurden und interessante Ergebnisse vorliegen, vgl. hierzu Abschnitt 2.3.3. Wie im Verlauf der vorliegenden Arbeit noch erläutert werden wird, ist die Handhabung des Zugmodus in 3D-Systemen mit der Verwendung in 2D-Systemen keinesfalls identisch.

Die Untersuchung von Werkzeugkompetenzen in dreidimensionalen dynamischen Geometriesystemen stellt ein Forschungsvorhaben dar, in dem nahezu keine Forschungsergebnisse bekannt sind, es liegen lediglich Fakten aus 2D-Systemen vor, die nicht ohne Weiteres auf 3D-Systeme übertragbar sind. Zur ersten Erschließung eines Forschungsgebietes, in dem nur wenige oder keine Forschungsergebnisse vorliegen, bietet sich ein qualitativer Zugang an, um im Verlauf des Forschungsvorhabens Fragestellungen anzupassen bzw. auszuscharfen und eventuell das Forschungsdesign neu zu konzeptualisieren.

Am Anfang eines solchen, auf qualitativen Methoden beruhenden, Forschungsvorhabens steht eine Sammlung von Fragen, welche einen ersten Zugang zum Gegenstand ermöglichen und das Forschungsfeld grob eingrenzen. Beschäftigt man sich mit dem Thema der dynamischen Geometriesoftware im 3D-Raum und speziell dem *Zugmodus*, so stellen sich mehrere, zunächst sehr

³ mit *Cabri Géométre*

offene Fragen. Potentiell interessante Leitfragen zu Beginn der Untersuchung lauten:

- Wie verhalten sich Probanden, wenn sie zum ersten Mal in 3D-Umgebungen arbeiten?
- Verwenden die Probanden den Zugmodus spontan, wenn sie bereits Erfahrungen in 2D-Umgebungen vorweisen können?
- Können verschiedene Zugmodi erkannt und deren Existenz mit existierenden Theorien (bspw. nach Arzarello) im 2D-Fall in Einklang gebracht bzw. erweitert werden?
- Sind gravierende Unterschiede im Verhalten in verschiedenen Softwareumgebungen zu konstatieren?
- Verwenden Probanden den Zugmodus zur Validierung von Lösungen in Konstruktionsaufgaben?
- Sind Entwicklungen im Gebrauch des Zugmodus innerhalb eines längeren Zeitraums festzustellen?
- Wie kann man den sinnvollen Einsatz des Zugmodus erlernen?
- Hat die Verwendung von 3D-Systemen im Unterricht einen positiven Effekt auf die Raumvorstellung?

Nicht alle der zunächst bewusst sehr offen formulierten Fragen werden beantwortet werden können, was im Übrigen auch nicht Anliegen der vorliegenden Arbeit sein kann. In den folgenden Kapiteln wird der Verlauf einer qualitativen Studie auf der methodologischen Basis einer *Grounded Theory* aufgezeigt, in der sich zunächst offene Fragen, wie die soeben formulierten, stellen. Ein Grundanliegen der *Grounded Theory* besteht in der Offenheit Fragestellungen im Verlauf des Forschungsprozesses zu verändern bzw. zu präzisieren und deren Diskussion bzw. Beantwortung in die laufende Untersuchung einzubetten. Ausgehend von diesen Fragen wird das Forschungsdesign im Verlauf der Studie immer wieder an die jeweils vorliegenden Ergebnisse angepasst. Dabei sind vorhandene Fragen zu präzisieren, eventuell sogar neu zu stellen.

Nach dem Durchlaufen des qualitativen Forschungsprozesses werden die folgenden Fragen zu beantworten sein:

1. Welche Zugmodi sind bei der Lösung von explorativen Aufgaben bzw. Konstruktionsaufgaben in einer *Cabri 3D*-Umgebung zu identifizieren?
2. Inwiefern können Veränderungen im Gebrauch des Zugmodus bei verschiedenen Probandengruppen über einen Zeitraum von 12 Wochen in einer *Cabri 3D*-Umgebung aufgezeigt werden?
3. Anhand welcher Bearbeitungsmerkmale kann eine Typisierung von Probandengruppen vorgenommen werden und inwiefern können diese Typen abstrahiert werden?

Zukünftige Nutzer werden von den Ergebnissen profitieren, da im Idealfall in naher Zukunft verbesserte Lernumgebungen entstehen und auch die Lehrenden selbst ein adäquates Problemverständnis für konkrete Schwierigkeiten der Anwender entwickeln können.

Bemerkung zu Quellenangaben:

In der vorliegenden Arbeit wird häufig auf Videodaten wie *S2/Gruppe/Datei Zeitabschnitt* verwiesen. Diese Daten können ebenso wie die Verlaufsprotokolle in Anhang A aufgrund von Datenschutzbestimmungen nicht vom Leser eingesehen werden. Die Verweise wurden nicht aus der Arbeit entfernt, um die Orientierung an wissenschaftlichen Standards aufzuzeigen. Auf die Anhänge B und C kann unter

<http://www.viewegteubner.de/Buch/978-3-8348-1625-2/Der-Zugmodus-in-3D-dynamischen-Geometriesystemen.htm>

im OnlinePLUS Programm des Vieweg+Teubner Verlags zugegriffen werden.

2 Theoretische Hintergründe

Im Kapitel *theoretische Hintergründe* werden theoretisch relevante Hintergründe zur Untersuchung des Zugmodus in 3D-DGS vorgestellt und erläutert. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit dem instrumentellen Ansatz der kognitiven Ergonomie nach Rabardel, welche eine Tätigkeitstheorie darstellt, die speziell für die Einbindung technologischer Hilfsmittel, als Vermittler zwischen einem handelnden Subjekt und einem Objekt konzipiert wurde. Im speziellen Fall ist die vermittelnde Wirkung von „Computerwerkzeugen“ zwischen Computernutzer und der Geometrie als mathematischer Teildisziplin zu untersuchen.

Im zweiten Abschnitt des Kapitels werden dynamische Geometriesoftwaresysteme definiert und deren Entwicklung vorgestellt, bevor die Nennung und Diskussion wichtiger Forschungsergebnisse in DGS-Umgebungen und spezieller Theorien zu Problemen und Nutzungsweisen des Zugmodus erfolgt.

2.1 Instrumenteller Ansatz nach Rabardel

Der Einsatz von technologischen Hilfsmitteln wie Taschenrechnern, modernen Computeralgebrasytemen und Computersoftware allgemein, insbesondere auch DGS, erfordert einen theoretischen Rahmen, mit dessen Hilfe Interaktionen der Lernenden mit dem „Hilfsmittel“ beschrieben, analysiert und Probleme erklärt bzw. gedeutet werden können. Forschungsberichte bestätigen, dass die Arbeit mit technologischen Hilfsmitteln aufgrund der veränderten Umgebungen neue Probleme aufwerfen. Der anfängliche Optimismus, der die Vorteile einer Separierung von technischem und konzeptuellem Verständnis bei Verwendung von technologischen Hilfsmitteln unterstellte, muss somit differenzierter gesehen werden.

„At present, the optimism has taken on additional nuances. The research survey of Lagrange, Artigue, Laborde & Trouche [2003] indicates that difficulties arising while using technology for learning mathematics have gained considerable attention. These dif-

faculties on the one hand recognize the complexity of teaching and learning in general, but on the other hand reveal the subtlety of using tools for educational purposes.“
[Drijvers & Trouche, 2008, S. 364]

Eine weitere Schwierigkeit beim Umgang mit technologischen Hilfsmitteln führen Hollebrands, Laborde & Sträßer [2008, S. 178] an:

„Much research has shown that what is constructed by the learner is not necessarily what was intended by the designer of the environment or the teacher.“

Ähnlich argumentieren zu dieser Problematik Drijvers & Trouche [2008, S. 364]:

„Apparently, the use of cognitive technological tools . . . for the learning of mathematics, such as applets, graphing calculators, geometry software, and computer algebra systems, is not as easy as it might seem.“

Aufgrund der aktuellen Forschungslage hinsichtlich der Verwendung von technologischen Hilfsmitteln (vgl. Laborde & Sträßer [2010]) ist daher die „Benutzer-Werkzeug-Interaktion“ auch aus theoretischer Sicht näher zu untersuchen. Um die Benutzung eines allgemeinen Artefaktes durch ein Individuum aus Sicht der kognitiven Ergonomie beschreiben zu können, erarbeitet Rabardel [1995] in seiner Arbeit mit dem Titel *„Les Hommes et les Technologies - une approche cognitive des instruments contemporains“* einen instrumentellen Ansatz, der als übergreifende Theorie zu verstehen ist und sich somit nicht nur auf technologische Umgebungen anwenden lässt.¹

Instrumentell vermittelte Handlungen untersuchen neben der kognitiven Ergonomie auch die Ansätze der Tätigkeitstheorie bzw. soziokulturelle Ansätze, vgl. hierzu Engeström [1999] bzw. Wertsch [1998]. Rabardel baut auf Arbeiten zur Aktivitätstheorie Vygotskis (vgl. Vygotski [1978], Vygotski [1980]) und Leontievs (vgl. Leontiev & Hall [1978]) auf.

Vygotski verwendet die Begriffe „psychisches Werkzeug“ oder auch „Instrument“, die als künstliche Mittel dazu dienen, psychische Prozesse zu beherrschen. Als Beispiele nennt er u.a. die Sprache, die Schrift, mnemotechnische Mittel, Zeichnungen und algebraische Symbole, welche der Beherrschung von eigenen oder fremden psychischen Prozessen dienen, vgl. Vygotski [1980, S. 1].

¹ Vergleiche die Analyse zur Schulbuchnutzung auf Grundlage des Rabardelschen Ansatzes in Rezat [2009].

Das Werkzeug dient somit als

„a new intermediary element situated between the object and the psychic operation directed at it.“

[Vygotski [1992, S. 49] zitiert nach Drijvers & Trouche [2008, S. 366]]

Mit dem Einbezug von „Werkzeugen“ in den Verhaltensprozess lässt sich nun der instrumentelle Akt nach Vygotski beschreiben.

„Die psychischen Prozesse insgesamt, die eine komplizierte strukturelle und funktionale Einheit darstellen, was das Gerichtetsein auf die Lösung der vom Objekt gestellten Aufgabe sowie die Stimmigkeit und die durch das Werkzeug vorgeschriebene Verlaufsweise anbelangt, bildet ein neues Ganzes, den instrumentellen Akt.“
[Vygotski, 1980, S. 4]

Das psychische Werkzeug im instrumentellen Akt tritt also zwischen das Objekt und die darauf gerichtete psychische Operation und übernimmt hierbei eine verbindende Funktion.

Vygotski wählt die Begriffe „psychische Werkzeuge“ oder „Instrumente“, da sie eine ähnliche Rolle der Vermittlung zwischen Subjekt und Objekt spielen wie das Arbeitswerkzeug, ohne jedoch in allen Merkmalen vergleichbar zu sein.

„Das in den Verhaltensprozess eingeschlossene psychische Werkzeug bestimmt mit seinen Eigenschaften den Aufbau des instrumentellen Aktes und verändert den gesamten Verlauf sowie die gesamte Struktur der psychischen Funktionen in derselben Weise, wie technisches Werkzeug den Prozess der natürlichen Anpassung verändert, indem es die Form von Arbeitsoperationen bestimmt.“
[Vygotski, 1980, S. 1]

Das Arbeitswerkzeug zielt in seinem Gebrauch auf die Veränderung des Objektes ab, was jedoch für das psychische Werkzeug nicht zutrifft, wie Vygotski [1980, S. 313f.] bemerkt:

„Der allerwesentlichste Unterschied des psychischen Werkzeugs vom technischen besteht darin, dass seine Aktion sich auf die Psyche und das Verhalten richtet, während das technische Werkzeug, das sich ebenfalls als Mittelglied zwischen die Tätigkeit des Menschen und das äußere Objekt schiebt, darauf gerichtet ist, irgendwelche Veränderungen am Objekt herbeizuführen; das psychische Werkzeug verändert am Objekt nichts; es ist ein Mittel

der Einwirkung auf sich selbst (oder auf einen anderen), auf die Psyche, auf das Verhalten, nicht aber ein Mittel der Einwirkung auf das Objekt. Im instrumentellen Akt äußert sich folglich eine Aktivität im Hinblick auf sich selbst und nicht im Hinblick auf das Objekt.“

Die entscheidende Erweiterung der Theorie des instrumentellen Ansatzes von Rabardel [1995] im Vergleich zu Vygotskis Arbeiten besteht in der zusätzlichen Unterscheidung der Begriffe *Artefakt* und *Instrument*, wobei das *Instrument* nach Rabardel im konstruktivistischen Sinn vom Nutzer gebildet werden muss.

„An instrument cannot be confounded with an artifact. An artifact only becomes an instrument through the subject’s activity. In this light, while an instrument is clearly a mediator between the subject and the object, it is also made up of the subject and the artifact.“

[Béguin & Rabardel, 2000, S. 175]

Somit ist das vermittelnde Objekt zunächst als reines Artefakt zu betrachten, welches erst durch das handelnde Subjekt zum Instrument wird.

„The artifact is the “bare tool“ the material or abstract object, which is available to the user to sustain a certain kind of activity, but which may be a meaningless object to the user as long as that person does not know what kinds of tasks the „thing“ can support in which ways. Only after the user has become aware of how the artifact can extend one’s capacities for a given kind of relevant tasks, and after the user has developed means of using the artifact for the specific purpose, does the artifact become part of a valuable and useful instrument that mediates the activity.“

[Drijvers & Trouche, 2008, S. 367]

Die Bildung eines Instrumentes ist ein bidirektionaler Prozess, in dem einerseits der Nutzer dem Artefakt Eigenschaften oder Formen der Nutzung zuschreibt bzw. diese erweitert, auf der anderen Seite das Artefakt aufgrund seiner Struktur und speziellen Beschaffenheit auf den Nutzer einwirkt und auf diese Weise die Möglichkeiten der Nutzung auf Seiten des Subjekts mitbestimmt. Rabardel unterscheidet in diesem Zusammenhang die Begriffe der *Instrumentalisierung* und *Instrumentierung*, wobei beide vom Subjekt ausgehen, sich jedoch in ihrer jeweiligen Gerichtetheit zum Artefakt bzw. zum Subjekt unterscheiden.

Der Prozess der Instrumentalisierung geht vom Subjekt aus und ist auf das Artefakt gerichtet.

„L’instrumentalisation peut être définie comme un processus d’enrichissement des propriétés de l’artefact par le sujet. Un processus qui prend appui sur des caractéristiques et propriétés intrinsèques de l’artefact, et leur donne un statut en fonction de l’action en cours de la situation. [...] Au delà de l’action en cours, ces propriétés intrinsèques peuvent conserver le statut de fonction acquise. Elles constituent alors, pour le sujet, une caractéristique, une propriété permanente de l’artefact, ou plus exactement de la composante artefact de l’instrument. La fonction acquise est une propriété extrinsèque, attribué par le sujet pour que l’artefact puisse être constitutif d’un instrument.“²

[Rabardel, 1995, S. 114]

Drijvers & Trouche [2008, S. 369] beschreiben den Begriff der Instrumentalisierung ähnlich:

„[...] the conceptions and preferences of the user change the ways in which he or she uses the artifact, and may even lead to changing or customizing it. [...] The artifact is shaped by the user and this is called instrumentalization.“

Um den Begriff der Instrumentierung in seiner Allgemeinheit erfassen zu können, bedarf es zunächst der Begriffsbildung von „mentalen Schemata“, welche zur Konstituierung eines Instrumentes erforderlich sind.

Um aus einem schlichten Artefakt ein Instrument zu konstruieren, ist die Ausbildung von „mentalen Schemata“, den *mental schemes* oder *schèmes* im Originaltext Rabardels auf Seiten des Subjekts erforderlich, die es erlauben, das Artefakt hinsichtlich des Verwendungszwecks adäquat zur Ausführung einer Handlung als Instrument zu nutzen.

„Nous pensons qu’il faut définir l’instrument comme une entité mixte, qui tient à la fois du sujet et de l’objet (au sens philosophique du terme): l’instrument est une entité composite qui comprend une composante artefact (un artefact, une fraction d’artefact ou un ensemble d’artefacts) et une composante schème (le ou

² „Instrumentalization can be defined as process in which the subject enriches the artifact’s properties. This process is grounded in the artifact’s intrinsic characteristics and properties, and gives them a status in line with the action underway and the situation.“
[Rabardel, 2002, S. 106]

les schèmes d'utilisation, eux-mêmes souvent liés à des schèmes d'action plus généraux).“³
[Rabardel, 1995, S. 95]

Verkürzt lässt sich der Zusammenhang in der folgenden Darstellung zusammenfassen:

Instrument = Artefakt + mentales Schema,

wobei die Bildung eines Instruments von Seiten des Individuums nicht instantan mit dem Vorhandensein eines Artefaktes erfolgt. Die Phase der „Heranbildung“ des Instruments, also die Phase des Erlernens der kompetenten Handhabung eines Artefaktes, aber auch das damit verbundene Erkennen von Unzulänglichkeiten oder Einschränkungen des Artefaktes hinsichtlich eines bestimmten Einsatzzwecks, wird als *instrumentelle Genese* bezeichnet.

„The „birth“ of an instrument requires a process of appropriation, which allows the artifact to mediate the activity. This complex process is called the instrumental genesis.“
[Drijvers & Trouche, 2008, S. 368]

Mit der *instrumentellen Genese* einher geht die Entwicklung von einem oder mehreren „mental Schemata“, den sogenannten *Gebrauchsschemata*, deren Definition und Operationalisierbarkeit nicht trivial sind. Es stellen sich die Fragen, was genau ein *Gebrauchsschema* ist und welche Möglichkeiten der Beobachtung möglich sind. Auf zunächst sehr globalen Definitionen des Schemabegriffs Piagets (vgl. Piaget & Beth [1961]) baut Vergnaud auf, der ein Schema betrachtet als

„une organisation invariante de la conduite pour une classe donnée de situations.“
[Vergnaud, 1996b, S. 177]

Weiterhin führt Vergnaud [1996a] aus:

„le schème est une totalité dynamique fonctionnelle - cela signifie en clair que le schème est une unité identifiable de l'activité du sujet, qui correspond à un but identifiable, qui se déroule selon un certain décours temporel (et donc une dynamique), et dont la

³ „We propose defining the instrument as a mixed entity, born of both the subject and object (in the philosophical sense of the term): the instrument is a composite entity made up of an artifact component (an artifact, a fraction of an artifact or a set of artifacts) and a scheme component (one or more utilization schemes, often linked to more general action schemes).“ [Rabardel, 2002, S. 86]

fonctionnalité repose sur un ensemble d'éléments peu dissociables les uns des autres.“

[Vergnaud [1996b, S. 283] zitiert nach Restrepo [2008, S. 39]]

Das Einwirken des Artefaktes auf den Nutzer beschreibt der Begriff der Instrumentierung. Drijvers & Trouche [2008, S. 368] liefern bereits eine handhabbare Erklärung des Begriffs, die auf die Verwendung des Schemabegriffs verzichtet.

„[...] the possibilities and constraints of the artifact shape the techniques and the conceptual understanding of the user. Some approaches are quite natural in a specific environment, while others are discouraged because of the peculiarities of the artifact. This is called the instrumentation process: The artifact shapes the thinking of the user.“

Rabardel expliziert den Prozess der Instrumentierung mithilfe der Anpassung von *schèmes d'utilisations* (vgl. Rabardel [1995, S. 91]), den *Gebrauchsschemata* bzw. der Anwendung von bereits gebildeten *Gebrauchsschemata* auf neue Artefakte:

„La genèse des schèmes, l'assimilation de nouveaux artefacts aux schèmes (donnant ainsi une nouvelle signification aux artefacts), l'accomodation des schèmes (contribuant à leurs changements de signification), sont constitutifs de cette seconde dimension de la genèse instrumentale: les processus d'instrumentation.“⁴

[Rabardel, 1995, S. 117]

Diese Gebrauchsschemata, welche sich noch in *schèmes d'usage* und *schèmes d'action instrumentée*, vgl. Rabardel [1995, S. 91] unterscheiden lassen, werden zunächst allgemein als vom Subjekt zu konstruierend definiert.

„What we propose to call a utilization scheme [...] is an active structure into which past experiences are incorporated and organized, in such a way that it becomes a reference for interpreting new data. As such, a utilization scheme is a structure with a history, that changes as it is adapted to an expanding range of situations and is contingent upon the meanings attributed to the situations by the individual.“

[Béguin & Rabardel, 2000, S. 182f.]

⁴ „The genesis of these schemes, the assimilation of new artifacts to schemes (thus giving new signification to artifacts), the adaption of schemes (contributing to their changes in signification), make up this second dimension of instrumental genesis: instrumentation processes.“ [Rabardel, 2002, S. 109]

Um eine Unterscheidung zwischen *schèmes d'usage*, welche an die Einschränkungen und Möglichkeiten des Artefakts direkt gebunden sind und den komplizierter aufgebauten *schèmes d'action instrumentée*, die auf eine Veränderung des Objekts der Tätigkeit direkt abzielen, nimmt Rabardel die folgende Differenzierung vor. Die *schèmes d'usage* sind direkt an das Artefakt gebunden:

„Ils peuvent, comme dans notre exemple, se situer au niveau de schèmes élémentaires (au sens de non décomposables en unités plus petites susceptibles de répondre à un sous but identifiable), mais ce n'est nullement nécessaire: ils peuvent eux-mêmes être constitués en totalités articulant un ensemble de schèmes élémentaires. Ce qui les caractérise, c'est leur orientation vers les tâches secondes correspondant aux actions et activités spécifiques directement liées à l'artefact.“⁵

[Rabardel, 1995, S. 91]

Die *schèmes d'action instrumentée* sind direkt auf den Gegenstand der Aktion bezogen:

„Les *schèmes d'action instrumentée*, qui consistent en totalités dont la signification est donnée par l'acte global ayant pour but d'opérer des transformations sur l'objet de l'activité. Ces schèmes, incorporent, à titre de constituants, les schèmes du premier niveau (les schèmes d'usage, M.H.). [...] Ils sont constitutifs de ce que Vygotsky appelait les “actes instrumentaux“, pour lesquels il y a recomposition de l'activité dirigée vers le but principal du sujet du fait de l'insertion de l'instrument.“⁶

[Rabardel, 1995, S. 91]

Die *schèmes d'action instrumentée* sind hinsichtlich ihres Aufbaus meist deutlich komplexer als die *schèmes d'usage*, wobei ein *schème d'action instrumentée* oft aus der Kombination mehrerer *schèmes d'usage* resultiert.

⁵ „These can, as in our example, be located at the level of elementary schemes (meaning they cannot be broken down into smaller units liable to meet an identifiable sub-goal), but it is by no means necessary: they can themselves be constituted as wholes articulating a set of elementary schemes. Their distinctive feature is that they are orientated towards secondary tasks corresponding to the specific actions and activities directly related to the artifact.“ [Rabardel, 2002, S. 83]

⁶ „Instrument-mediated action schemes, which consist of wholes deriving their meaning from the global action which aims at operating transformations on the object of activity. These schemes incorporate usage schemes are constitutents. ... They make up what Vygotsky called “instrumental acts“, which, due to the introduction of the instrument, involve a restructuring of the activity directed towards the subject's main goal.“ [Rabardel, 2002, S. 83]

Zur Diskussion der Begriffe „Instrumentierung“ und „Instrumentalisierung“ trägt Rezat [2009] bei, indem er das simultane Auftreten beider Prozesse bemerkt. Um diesen Verbund hervorzuheben prägt er den Begriff der *Instrumentation*, der die Begriffe *Instrumentierung* und *Instrumentalisierung* vereint und deren gemeinsames Auftreten betont, vgl. Rezat [2009, S. 31].

Am Beispiel des Artefaktes „Schraubendreher“ werden die abstrakt definierten Begriffe nun veranschaulicht. Zunächst ist für einen Nutzer, der zum ersten Mal mit einem Schraubendreher in Berührung kommt, die Art der Handhabung dieses Artefaktes nicht sofort ersichtlich. Vorausgesetzt der Nutzer ist in der Lage, einen Hammer in herkömmlicher Weise zu bedienen, so kann er das dort erlernte Gebrauchsschema auf den Schraubendreher anwenden, um mit dessen Hilfe, nämlich indem er den Griff des Schraubendrehers benutzt, einen Nagel in die Wand schlagen. (Instrumentalisierung)

An diesem Beispiel werden auch allgemeine Eigenschaften der Kombination von Artefakten und Gebrauchsschemata deutlich. So kann ein an einem bestimmten Artefakt gebildetes Gebrauchsschema auf andere Artefakte angewandt werden, wobei jede Kombination dieses Gebrauchsschemas mit einem anderen Artefakt ein neues Instrument konstituiert. Als Beispiel dient das Gebrauchsschema des „Hämmerns“ mit den Artefakten „Hammer“ und „Schraubendreher“. Ebenso ist die Kombination von verschiedenen Gebrauchsschemata mit dem gleichen Artefakt denkbar. Als Beispiel dient das Artefakt des „Schraubendrehers“ mit den Gebrauchsschemata „Hämmern“ und „Eindrehen von Schrauben“, welche in Kombination mit dem „Schraubendreher“ zwei unterschiedliche Instrumente im Sinne Rabardels bilden.

„Les deux composantes de l'instrument artefact et schème, sont associées l'une à l'autre, mais elles sont également dans une relation d'indépendance relative. Un même schème d'utilisation peut s'appliquer à une multiplicité d'artefacts appartenant à la même classe [...] mais aussi relevant de classes voisines ou différentes [...]. Inversement un artefact est susceptible de s'insérer dans une multiplicité de schèmes d'utilisation qui vont lui attribuer des significations et parfois des fonctions différentes.“⁷

[Rabardel, 1995, S. 95]

⁷ „The two components of the instrument, artifact and scheme, are associated with each other, but they also have a relationship of relative independence. A same utilization scheme can be applied to a range of artifacts belonging to the same class ... and also be relevant to to similar or different classes ... Conversely, an artifact is liable to be integrated into a range of utilization schemes, which will sometimes assign it different meanings and functions.“ [Rabardel, 2002, S. 87]

Die Beschaffenheit des Schraubendrehers an sich wirkt auf den Nutzer in der Weise ein, dass dieser sehr wahrscheinlich nicht bzw. nur mithilfe großer Phantasie die Möglichkeit in Erwägung ziehen wird, diesen Schraubendreher als Pinsel zu benutzen, um damit eine Wand zu streichen. Die Einschränkungen des Artefakts hinsichtlich der Benutzung zum Streichen einer Wand sind so gravierend, dass sie auf den Nutzer derart einwirken, dass dieser keine *Gebrauchsschemata* zum Streichen einer Wand mithilfe des Schraubendrehers bilden wird. Die Eigenheiten des Artefakts beeinflussen auf diese Weise das konzeptuelle Verständnis des Nutzers. (Instrumentierung)

Beispiele der Anwendung des Rabardelschen Ansatzes auf mathematikdidaktische Fragestellungen finden sich in Restrepo [2008], in der die *instrumentelle Genese* des Zugmodus in einer *Cabri-2D*-Umgebung mit der Ausbildung verschiedener *schèmes d'usage* und *schèmes d'action instrumentée* bei mehreren Schülerpaaren der Unterstufe analysiert wird. Rezat [2009] führt mithilfe des instrumentellen Ansatzes eine Nutzerstudie des Artefaktes „Schulbuch“ mit Schülern der Unter- und Oberstufe durch, welche eine Nutzertypologie des Schulbuchs zum Ziel hat. Trouche [2000] analysiert die Ausbildung von *schèmes d'action instrumentée* von 18-jährigen Schülern in Frankreich im Umgang mit graphischen Taschenrechnern beim Thema „Grenzwertbetrachtungen“ von Funktionen. Diese Analyse setzt sich in Trouche [2003] mit der Diskussion der *instrumental orchestration*, der Gesamtheit aller Maßnahmen, die ein Lehrer zur Förderung der *instrumentellen Genese* ergreift, mithilfe eines „Sherpa-Schülers“ fort. Drijvers et al. [2009] untersuchen mithilfe des theoretischen Rahmens der *instrumental orchestration* das Vorgehen von verschiedenen Lehrern und identifiziert sechs verschiedene Typen einer solchen „Orchestrierung“, die in Beziehung mit den individuellen Meinungen der Lehrer bezüglich des Lehrens und Lernens von Mathematik gesetzt werden können. Eine theoretische Darstellung der „instrumentellen Genese“ hinsichtlich der Entwicklung von Gebrauchsschemata von Schulbuch- und Computernutzern führt Sträßer [2009] durch. Einen historischen Überblick hinsichtlich des Einsatzes von „Werkzeugen“ und deren instrumenteller Genese bei mathematischen Fragestellungen geben Maschietto & Trouche [2010].

Relevanz für die vorliegende Arbeit

Der instrumentelle Ansatz Rabardels dient als Hintergrundtheorie für die theoretische Konzeptualisierung des Zugmodus in 3D-DGS. Der Zugmodus kann als Artefakt betrachtet werden, der aufgrund seiner Implementierung im System gewissen Einschränkungen unterworfen ist. So sind bestimmte Punkte nur auf einer Geraden oder in einer Ebene zu bewegen, während andere im gesamten Raum bewegt werden können. Somit kann das Ausbilden eines

Gebrauchsschemas, das dem Nutzer das Bewegen eines Punkts ermöglicht, als Anwendung eines *schèmes d'usage* in Zusammenhang mit dem Artefakt Zugmodus gedeutet werden, sodass durch diese Kombination ein Instrument im Sinne Rabardels gebildet wird. Nun existieren kompliziertere Formen des Zugmodus, die bspw. vom Nutzer so implementiert werden, dass Punkte nur auf Objekten bewegt werden können, wobei diese mathematischen Objekte eventuell wieder spezielle Eigenschaften wie bspw. Orthogonalität zu einem anderen Objekt aufweisen. Solche Kombinationen oder verschieden komplizierte Einbindungen des Zugmodus erfordern die Kombination von *schèmes d'usage* zu oder die Neubildung von *schèmes d'action instrumentée*, welche wiederum im Zusammenhang mit dem Artefakt Zugmodus verschiedene Instrumente bilden. Wie bereits bemerkt, treten Instrumentalisierungs- und Instrumentierungsprozesse immer gemeinsam auf, sodass das Werkzeug *Zugmodus* aufgrund seiner Beschaffenheit und seiner speziellen Verwendungsmöglichkeit auf den Nutzer einwirkt und somit seine Art der Verwendung bzw. den Aufbau von Gebrauchsschemata mitbestimmt. (Instrumentierung) Andererseits schreibt der Nutzer dem Werkzeug Zugmodus im Verlauf des Gebrauchs verschiedene Verwendungsmöglichkeiten zu, die zur Ausbildung von Gebrauchsschemata führen und in unterschiedlichen Instrumenten resultieren. (Instrumentalisierung)

Während der finale Gebrauch eines gebildeten Instruments, also die konkrete Verwendungsweise des Zugmodus im Handlungskontext beobachtbar ist, kann der Instrumentierungsprozess, also die Einwirkung des Artefaktes Zugmodus auf die Bildung von Gebrauchsschemata des Nutzers nicht direkt beobachtet werden. Somit ist das fertige Instrument in Handlungssituationen nachweisbar, wobei eine weitere Identifikation von *schèmes d'usage* und *schèmes d'action instrumentée* nach geeigneter Definition möglich ist. Der konkrete Verlauf der Bildung von Gebrauchsschemata hinsichtlich einer Differenzierung von Instrumentalisierungs- und Instrumentierungsprozessen ist aufgrund des gemeinsamen Auftretens der beiden Prozesse, deren Komplexität und kognitiven Struktur nicht möglich.

Im Verlauf der Dissertation werden in 3D-Umgebungen verschiedene Verwendungsweisen des Zugmodus im konkreten Datenmaterial identifiziert und teilweise neu definiert. Die genaue Analyse der instrumentellen Genese von einzelnen Zugmodi steht jedoch nicht im Fokus des Vorgehens, sodass zwar gebildete Instrumente, also nachgewiesene Verwendungsweisen des Zugmodus in ihrer Häufigkeit und gruppenspezifischen Verwendung erfasst und interpretiert werden, der Verlauf der Ausbildung von einzelnen Gebrauchsschemata im Sinne von Restrepo [2008] aufgrund der Beschaffenheit des Datenmaterials und der gewählten Analyseverfahren nicht durchgeführt wird.

2.1.1 Unterscheidung von Zeichnung und Figur

Parzys [1988] untersucht Schwierigkeiten bei Sechstklässern in französischen Schulen bei der Interpretation zweidimensionaler Repräsentationen von dreidimensionalen Objekten. Hierbei stützt er sich auf die Unterscheidung der Begriffe *Figur* und *Zeichnung*. Während die *Figur* das geometrische Objekt bezeichnet, das mithilfe eines Textes in idealer Weise als Produkt der reinen Vorstellung beschrieben werden kann, versteht er unter dem Begriff der *Zeichnung* das konkret vorliegende Produkt, welches mit einem Stift bzw. einem Computerprogramm erstellt werden kann. Diese Unterscheidung ist hinsichtlich der Verwendung von Computern im Geometrieunterricht bedeutsam, da DGSe es erlauben, die Unterschiede zwischen Figur und Zeichnung explizit zu machen. Dieser Aspekt wird im folgenden Abschnitt weiter verfolgt.

2.2 Geometrie und die Entwicklung von Werkzeugen

Die Geometrie ist eine der ältesten Teildisziplinen der Mathematik und jeder Einzelne hat ein gewisses Bild von dem, was speziell er unter Geometrie versteht. Im folgenden Abschnitt werden verschiedene epistemologische Perspektiven des Geometriebegriffs dargestellt und voneinander abgegrenzt, um ein begriffliches Fundament aufzubauen und die Breite des Feldes auszuloten, in dem man sich bei der Diskussion von konkreten Inhalten, Curricula, Methoden und Werkzeugen der Geometrie befindet.

Erste Anwendungen von Geometrie sind im mitteleuropäischen Raum bereits ca. 5000 v.Chr. zu belegen (vgl. Wußing [2008, S. 12f.]), wobei diese häufig mit der Formgestaltung keramischer Erzeugnisse, astronomischen Beobachtungen oder Ornamenten in Verbindung stehen. Das wohl bekannteste Beispiel der „Erdmessung“ stellt die Vermessung von Land nach den häufigen Nilüberschwemmungen in Ägypten ab ca. 3000 v.Chr. dar. Somit bietet die Geometrie in ihren Anfängen ausschließlich Möglichkeiten zur „praktischen Lebenshilfe“ (vgl. Weigand [2009, S. 266]), wobei sich dieses Anwendungsspektrum immer weiter ausdehnt und bis zur Berechnung von Umlaufbahnen von Planeten bzw. des Sonnendurchmessers im Mittelalter fortsetzt. Diese praktische Verwendung von Geometrie hat ihre Bedeutung im heutigen Zeitalter keineswegs verloren, wobei der Begriff der „deskriptiven Geometrie“ für den gesellschaftlichen Nutzen, wie der Beschreibung des physikalischen Raumes, der gewerblich-technischen Nutzung, graphischer Darstellungen usw. Verwendung findet, vgl. Sträßer [1992] sowie Kadunz & Sträßer [2007, S. 1ff.].

Zwischen dem sechsten und fünften Jahrhundert v. Chr. steht die Mathematik noch nicht als ausgebildete mathematische Theorie zur Verfügung, vgl. Scriba & Schreiber [2005, S. 29]. Anaximandros gibt im Bereich der griechischen Naturwissenschaften in der Mitte des fünften Jahrhunderts v. Chr. den Anstoß zur Ausbildung mathematischer Theorien, welche zur Analyse der in der Natur vorkommenden Strukturen dienen, vgl. Scriba & Schreiber [2005, S. 29ff.]. Dies ist der erste Versuch, Eigenbereiche der Mathematik zu generieren, welche als theoretisches Hilfsmittel genutzt werden können. Die Entwicklung von theoretischen Betrachtungen, deren Studium sich durch die Ablösung von konkret vorliegenden praktischen Problemen auszeichnet, verfolgen auch Thales, die Pythagoreer und Eudoxos, vgl. Scriba & Schreiber [2005, S. 31ff.]. Den Höhepunkt des Erkenntnisgewinns, welcher durch reines Denken ermöglicht wird und somit auf der Methodologie von Aristoteles bzw. der Philosophie Platons aufbaut (vgl. Scriba & Schreiber [2005, S. 50]), stellen ca. 300 v. Chr. *die Elemente* des Euklid dar (vgl. Euclides & Thaler [2005]), in denen eine axiomatische Festlegung der Geometrie erfolgt und Aussagen bzw. Sätze durch rein deduktives Vorgehen gewonnen werden. Weder die Anwendung noch eine Darstellung der Inhalte in der materialen Welt sind hierbei von Belang. Jedoch ist eine Orientierung an identifizierbaren Objekten wie Punkten und Geraden in Euklids Postulaten⁸ noch gegeben, sodass *die Elemente* als Prototyp einer inhaltlich axiomatischen Theorie gelten. Hierbei werden zur Begründung von Wahrheiten relationale Beziehungen mathematischer Objekte untersucht, wobei rein deduktives Schließen den Erkenntnisgewinn sichert. Die Bedeutung und den Einfluss der Elemente auf spätere Generationen fasst Wußing [2008, S. 193] zusammen:

„Die *Elemente* stellen das vielleicht einflussreichste Werk der gesamten mathematischen Literatur dar.“

Euklids *Elemente* bilden die Basis der *relationalen* Betrachtung von Geometrie, deren Intention der Untersuchung auf theoretische Strukturen und Zusammenhänge abzielt und für die der Anwendungsbezug nicht relevant ist. Bei Euklid sind zudem die ersten *Werkzeuge* festgelegt, welche zur Konstruktion benutzt werden dürfen. Hierbei handelt es sich um eine gerade Kante (ohne Längeneinteilung) und einen Zirkel.

Die nichteuklidischen Geometrien, die aus dem Infragestellen des Parallelenpostulates Euklids hervorgehen, sind ein weiterer Meilenstein in der Geschichte der Geometrie. Zudem motivieren diese Geometrien eine von der Anschauung unabhängigere Sicht der Dinge⁹, vgl. Scriba & Schreiber [2005, S. 418ff.] sowie Mammana & Villani [1998].

⁸ Im heutigen Sprachgebrauch wären die Postulate Euklids als Axiome zu bezeichnen.

⁹ Hierzu ist anzumerken, dass diese nichteuklidischen Geometrien, welche zunächst jegli-

Im Zuge dieser Entdeckungen verschärft David Hilbert die Anforderungen an ein axiomatisches System in seinem formalistischen Programm in der Weise, dass es an keinerlei inhaltliche Anschauung mehr gebunden ist und nur den Forderungen von Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit genügen muss. Die Hoffnung auf die Durchsetzung dieses Programms für die gesamte Mathematik macht jedoch Kurt Gödel mit der Bekanntgabe seines Unvollständigkeitssatzes zunichte, vgl. Heintz [2000, S. 47], Bender [1985, S. 245ff.] sowie Yourgrau et al. [2005, S. 66ff.].

Im Sinne der soeben kurz beschriebenen Ursprünge und Entwicklungen von *deskriptiver* und *relationaler* Geometrie war der Unterricht in Schulen seit jeher durch diese beiden Sichtweisen von Geometrie geprägt und ist dies auch heute noch. Im Schulunterricht konnten sich der Einsatz eines Lineals mit Längenskala und die Verwendung eines Geodreiecks durchsetzen, durch dessen Hilfe das Zeichnen von Winkeln, Orthogonalen und Parallelen erheblich erleichtert wurde. Nach mehreren Reformen der Lehrpläne (für einen historischen Überblick vgl. Neubrand [1998]) und einer zeitweise einseitigen Ausrichtung auf die *relationale* Geometrie im Verlauf der *New Math*-Bewegung der 70er Jahre, welche aus den Arbeiten der *Bourbaki*-Gruppe entstand, fand schließlich der Computer als weiteres Werkzeug Einzug in den Geometrieunterricht.

Die Logo – basierte „Turtle-Geometrie“ zu Beginn der 80er Jahre stellte einen der ersten Versuche dar, digitale Medien zum Lernen von Geometrie zu verwenden, vgl. Laborde et al. [2006, S. 278]. Die Idee der dynamischen Konstruktion erfolgte Mitte der 90er Jahre in diesen Umgebungen. Im Zuge dieser Entwicklungen stellen moderne DGSe eine stetige Weiterentwicklung von „Werkzeugen“ dar, welche schon immer zum „Treiben von Geometrie“ genutzt wurden. Dabei bieten DGSe eine Möglichkeit, die *deskriptive* und die *relationale* Geometrie zu verbinden:

„It is modern computer technology and appropriate software which can be successfully used to really explore and understand the underlying... mathematics.“
[Straßer, 2007, S. 169]

Hierbei muss die Bedeutung theoretischer Vorarbeiten hinsichtlich der Unterscheidung von *Figur* und *Zeichnung* erwähnt werden, welche diese Möglichkeiten erst eröffnen, vgl. Abschnitt 2.1.1. Im Verlauf dieser Entwicklungen ist sowohl ein wachsendes Interesse am Einsatz von Technologie, insbeson-

cher Anschauung entbehrten, im Bereich der allgemeinen Relativitätstheorie jedoch an konkreter Bedeutung gewinnen, in der die Riemannsche Geometrie die Krümmung der Raumzeit adäquat beschreibt.