

Philosophische Bibliothek

Bernard Bolzano
Paradoxien des Unendlichen

Meiner





BERNARD BOLZANO

Paradoxien des Unendlichen

Mit einer Einleitung und Anmerkungen
herausgegeben von
CHRISTIAN TAPP

FELIX MEINER VERLAG
HAMBURG

PHILOSOPHISCHE BIBLIOTHEK BAND 630

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-7873-2161-2

E-Book: ISBN 978-3-7873-2185-8

© Felix Meiner Verlag, Hamburg 2012. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe und der Übersetzung, vorbehalten. Dies betrifft auch die Vervielfältigung und Übertragung einzelner Textabschnitte durch alle Verfahren wie Speicherung und Übertragung auf Papier, Film, Bänder, Platten und andere Medien, soweit es nicht §§ 53 und 54 URG ausdrücklich gestatten. Satz: Christian Tapp. Druck und Bindung: Strauss, Mörlenbach. Werkdruckpapier: alterungsbeständig nach ANSI-Norm resp. DIN-ISO 9706, hergestellt aus 100% chlorfrei gebleichtem Zellstoff. Printed in Germany.

www.meiner.de

Inhaltsverzeichnis

| | |
|-----------------------------|----|
| <i>Vorwort</i> | 7 |
| <i>Einleitung</i> | 11 |
| 1. Der Autor | 11 |
| 2. Das Werk | 17 |
| 3. Der Text | 23 |

Bernard Bolzano Paradoxien des Unendlichen

| | |
|--|----|
| <i>Vorwort</i> [<i>des Erstherausgebers Průhonský</i>] | 29 |
| <i>Inhalt</i> [<i>sübersicht</i>] | 31 |
| <i>Paradoxien des Unendlichen</i> | 39 |
| §. 1 | 39 |
| §. 2 | 39 |
| §. 3 | 40 |
| §. 4 | 41 |
| §. 5 | 42 |
| §. 6 | 42 |
| §. 7 | 42 |
| §. 8 | 43 |
| §. 9 | 44 |
| §. 10 | 44 |
| §. 11 | 45 |
| §. 12 | 47 |
| §. 13 | 50 |
| §. 14 | 52 |
| §. 15 | 58 |
| §. 16 | 59 |
| §. 17 | 59 |
| §. 18 | 61 |
| §. 19 | 64 |
| §. 20 | 65 |
| §. 21 | 67 |
| §. 22 | 68 |
| §. 23 | 70 |
| §. 24 | 71 |

| | | | |
|---|-----|-----------------|-----|
| §. 25 | 72 | §. 48 | 129 |
| §. 26 | 73 | §. 49 | 136 |
| §. 27 | 75 | §. 50 | 143 |
| §. 28 | 79 | §. 51 | 147 |
| §. 29 | 80 | §. 52 | 148 |
| §. 30 | 83 | §. 53 | 148 |
| §. 31 | 84 | §. 54 | 149 |
| §. 32 | 85 | §. 55 | 149 |
| §. 33 | 90 | §. 56 | 150 |
| §. 34 | 92 | §. 57 | 151 |
| §. 35 | 95 | §. 58 | 152 |
| §. 36 | 97 | §. 59 | 152 |
| §. 37 | 100 | §. 60 | 153 |
| §. 38 | 108 | §. 61 | 154 |
| §. 39 | 111 | §. 62 | 155 |
| §. 40 | 114 | §. 63 | 155 |
| §. 41 | 118 | §. 64 | 159 |
| §. 42 | 119 | §. 65 | 159 |
| §. 43 | 120 | §. 66 | 160 |
| §. 44 | 121 | §. 67 | 161 |
| §. 45 | 123 | §. 68 | 162 |
| §. 46 | 124 | §. 69 | 163 |
| §. 47 | 127 | §. 70 | 165 |
| <i>Anmerkungen des Herausgebers</i> | | 169 | |
| <i>Literaturverzeichnis</i> | | 222 | |

Vorwort

Eine gewisse Begeisterung für Werk und Person Bernard Bolzanos kann ich als Herausgeber dieses Bandes schwerlich verstecken. Sie wurde geweckt durch das schlichte Lesen und Mitdenken, das Mitgehen auf den beeindruckenden Gedankenwegen dieses immer noch zu wenig gewürdigten Philosophen, Theologen und Mathematikers.

Getroffen war ich auf Bolzano schon häufig, während des Studiums und später. Die für nachhaltige Begeisterung notwendige Intitialzündung verdanke ich jedoch dem Kollegen Winfried Löffler aus Innsbruck. Ihm bin ich dafür ebenso verbunden, wie den Kollegen Jan Berg (München), Wolfgang Künne (Hamburg), Edgar Morscher (Salzburg) und Kurt Strasser (Salzburg) für ihre großartige fachliche Unterstützung. Viele ihrer Anregungen sind in diesen Band eingeflossen.

Der Arbeitsaufwand dieser Edition konnte nur durch das Engagement des Teams am Lehrstuhl für Philosophisch-Theologische Grenzfragen der Katholisch-Theologischen Fakultät der Ruhr-Universität Bochum bewältigt werden. Dafür sei Ilona Dombert, Lisa Ernst, Alfonso Savarino, Andrea Strickmann und besonders Tobias Leibold herzlich gedankt. Marcel Simon-Gadhof und Jens-S. Mann vom Meiner Verlag danke ich für die anspruchsvolle und gute Zusammenarbeit – bei Weitem keine Selbstverständlichkeit mehr im heutigen verlegerischen Geschäft.

Bochum, am 5. Oktober 2011, dem 230. Geburtstag Bolzanos

Christian Tapp

»Doch den entschiedensten Vertheidiger hat das Eigentlich-Unendliche [...] in einem höchst scharfsinnigen Philosophen und Mathematiker unseres Jahrhunderts, in Bernhard [!] Bolzano gefunden, der seine betreffenden Ansichten namentlich in der schönen und gehaltreichen Schrift: ›Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851‹ entwickelt hat, deren Zweck es ist, nachzuweisen, wie die von Skeptikern und Peripathetikern aller Zeiten im Unendlichen gesuchten Widersprüche gar nicht vorhanden sind, sobald man sich nur die freilich nicht immer ganz leichte Mühe nimmt, die Unendlichkeitsbegriffe allen Ernstes ihrem wahren Inhalte nach in sich aufzunehmen.«

GEORG CANTOR, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig: Teubner 1883 = Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, 5., in: *Mathematische Annalen* 21 (1883), S. 545–591, hier 560.

Einleitung

1. Der Autor

Bernard Bolzano war in vielerlei Hinsicht ein außergewöhnlicher Mensch. Als Wissenschaftler verband er so verschiedene Begabungen wie die eines Mathematikers, eines Philosophen, eines Logikers und eines Theologen. Er war katholischer Priester und ein seine Zuhörer begeisternder Hochschullehrer. Er war ein tiefgläubiger Mensch und fühlte sich ganz der Vernunft verpflichtet. Gedankliche Klarheit, begriffliche Präzision und argumentative Untermauerung seiner Standpunkte galten ihm »als Grundlage für ein vernünftiges, gottgefälliges Leben zum Wohl der Allgemeinheit«.¹ Bolzano ist, dem Philosophen Michael Dummett zufolge, Urgroßvater der analytischen Philosophie.² Von ihm stammt der Satz von Bolzano-Weierstraß, den jeder Mathematikstudent heute in seinem ersten Semester lernt.



Bolzos Talente gipfelten zwar im wissenschaftlichen Bereich, sie erstreckten sich aber viel weiter. Er verstand sich selbst auch als Jugenderzieher, Ratgeber und »Seelenführer«. Er war an künstlerisch-ästhetischen Dingen ebenso interessiert wie an didaktisch-organisatorischen Fragen. Er war ein Sozialethiker und leidenschaftlicher Theoretiker einer gerechten Staatsordnung im Dienste der Glückseligkeit aller.

In seinen Werken legte Bolzano stets viel Wert darauf, die Positionen anderer Denker darzustellen und kritisch zu disku-

¹ STRASSER, *Einleitung* [2001], 11.

² DUMMETT, *Ursprünge* [1988], 167.

tieren. Und doch war er in seinem Denken extrem selbständig – zu selbständig vielleicht. Anfang 1820 wurde er seines Amtes als ordentlicher öffentlicher Professor der Religionslehre an der Prager Universität enthoben. Die Umstände der Amtsenthebung liegen teilweise bis heute im Dunkeln. Klar scheint, dass nicht einfach die kirchlichen Autoritäten einen modernistischen oder rationalistischen Professor loswerden wollten. Reaktionären politischen Kreisen waren die Erziehungsideale Bolzanos ein Dorn im Auge. Doch die enge Verflechtung von Kirche und Staat im damaligen Österreich gestattet eigentlich kaum zu entscheiden, ob seine Absetzung auf das Konto der Kirche oder das des Staates ging. Bolzano wollte seine Studenten jedenfalls zu mündigen Staatsbürgern heranbilden, die nicht einfach blind der Autorität gehorchten, sondern sich ihre eigenen Überzeugungen bilden und diese auch demokratisch vertreten sollten. Er prophezeihte eine kommende Zeit ohne Rang- und Klassengrenzen, dafür aber mit einer funktionierenden Verfassung. Das rief restaurative Kräfte in Kirche und Staat auf den Plan, die Bolzano bekämpften, allen voran der Leibarzt von Kaiser Franz I., Andreas Josef Freiherr von Stifft. Trotz einer Denunziation Bolzanos bei der römischen Kurie hatte der Prager Erzbischof Wenzel Leopold Chlumčanský Bolzano lange gegen Wiener Invektiven in Schutz genommen und sich hinter ihn gestellt. Nach der offiziellen Amtsenthebung, die ein Lehr-, Publikations- und Predigtverbot einschloss, setzte er zwar ein kirchliches Untersuchungsverfahren mit dem Ziel eines förmlichen Widerrufs in Gang. Schließlich genügte aber eine Erklärung Bolzanos über seine Rechtgläubigkeit sowie die feierliche Ablegung des Glaubensbekenntnisses vor dem Erzbischof am Silvestertag 1825.

Der Amtsenthebung waren 15 sehr produktive Jahre als Professor der Religionslehre vorausgegangen. Im Alter von nur 23 Jahren war Bolzano 1805 auf diese neugeschaffene Professur berufen worden, mit dem Auftrag, die weltanschauliche, religiöse und moralische Bildung der (Philosophie-) Studierenden zu sichern. Dies tat Bolzano nicht nur durch

seine akademischen Vorlesungen, sondern auch durch die Einrichtung von sog. »Erbauungsreden«. Diese predigtartigen Ansprachen wurden für die Studierenden von einer mühsamen Pflichtübung zu einem beliebten »Muss«. Sie nahmen Bolzano extrem in Anspruch. Viele dieser Texte sind zwischenzeitlich verschollen, andere sind publiziert worden. Bolzano pflegte dem Erstbesten, der ihn darum bat, sein Manuskript in die Hand zu drücken – oft ohne die Aussicht, das Verliehene zurückzubekommen.

Aus seinen Vorlesungen ging später eines seiner Hauptwerke, das *Lehrbuch der Religionswissenschaft* (RW), hervor. »Religionswissenschaft« meint dabei etwas ganz anderes als heute: keine empirische oder historische Religionsforschung, sondern eine interessante Mischung aus Religionsphilosophie, philosophischen Grundlagen der Theologie und einer gewissen Menge katholischer Dogmatik. Wegen des Publikationsverbots im Habsburgerreich gaben Schüler Bolzanos das Werk 1834 im angrenzenden Bayern anonym heraus. Seit 2006 liegt es in einer acht Teilbände umfassenden kritischen Edition im Rahmen der *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe* vor.

Schon im Jahr 2000 war die kritische Edition seines zweiten Hauptwerks, der *Wissenschaftslehre* (WL), in zwölf Teilbänden abgeschlossen worden. Die WL, eine großangelegte Grundlegung der Logik und der Wissenschaften, war erstmals im Jahre 1837 erschienen, ebenfalls in dem kleinen Verlag der von Seidelschen Buchhandlung im bayrischen Sulzbach.

Bolzanos Leben lässt sich recht natürlich in drei Perioden unterteilen: Die Zeit der Kindheit, des Schulbesuchs und des Studiums (1781–1805), die Prager Professur (1805–1820) und die lange Zeit im Ruhestand bzw. im Exil (1820–1848).

Die erste Phase beginnt am 5. Oktober 1781, als Bernard Placidus Johann Nepomuk als viertes von zwölf Kindern in eine, man möchte sagen, typische Familie des Habsburgerreichs geboren wurde: Der Vater Bernard Bolzano stammt aus der Lombardei, genauer vom Comer See im Herzogtum Mailand, die Mutter Cäcilie hingegen aus einer deutschsprachigen

Familie Maurer in Prag. Der Sohn Bernard »versteht sich als ›Böhme deutscher Zunge« und verlässt sein Heimatland Böhmen zeitlebens nicht.³

Der junge Bernard ist ein kränkliches, leicht schwächliches Kind. Er absolviert das Gymnasium in Prag und studiert anschließend an der dortigen Universität erst Philosophie und Mathematik, dann Theologie. Das akademische Jahr 1804–1805 muss ein turbulentes Jahr für den gerade 23-Jährigen gewesen sein. 1804 legt er die Rigorosen in Mathematik, Philosophie und Geschichte ab; anschließend fällt endgültig die Entscheidung, Priester zu werden; parallel bewirbt er sich um eine Universitätsprofessur für Mathematik, eine Universitätsprofessur für Religionslehre und eine Stellung als Gymnasialprofessor. Im April 1805 kulminieren dann die Ereignisse: Am 7. April wird er zum katholischen Priester geweiht, am 17. April zum Doktor der Philosophie promoviert und am 19. April tritt er seine Professur für Religionslehre an der Prager Karl-Ferdinands-Universität an (die Ernennung erfolgte schon im Februar 1805).

Bolzano fühlte sich lange von religiösen Zweifeln geplagt. Mit Hilfe des Theologiestudiums wollte er sich darüber Gewissheit verschaffen. Die Entscheidung, sich der Theologie und der Kirche zu verschreiben, konnte Bolzano wohl nur treffen, weil er sich letztlich der ausgesprochenen Meinung seines Lehrers, des Pastoraltheologen Marian Mika, anschließen konnte, »die Religion gewähre dem Menschen gewisse sittliche Vorteile, [und] besonders das katholische Christentum diene dazu, das Wohl der Gesamtheit zu fördern«.⁴ Diese utilitaristische Sicht bestimmte sowohl Bolzanos persönliches Ethos als auch seine moralischen Lehren und ethischen Theorien.

Die dritte Phase von Bolzanos Leben, nach der Amtsenthebung, gewinnt ihre spezifische Form durch seine Freundschaft mit Frau Anna Hoffmann, die er 1823 am Totenbett ihrer

³ STRASSER, *Einleitung* [2001], 5.

⁴ BOLZANO, *Lebensbeschreibung* [1836], 27–28.

Tochter kennenlernt. Mit ihrer Familie verbringt er zunächst die Sommermonate in einem Landgut im südböhmischen Těchobuz, während er sich im Winter weiter bei seinem Bruder in Prag aufhält. 1830 zieht er mit Familie Hoffmann dauerhaft nach Těchobuz, wo er bis 1841 lebt und arbeitet. In diesem Jahr erkrankt Anna Hoffmann schwer, und alle ziehen nach Prag zurück, wo Frau Hoffmann 1842 stirbt. Bolzano lebt von dieser Zeit bis zu seinem Tod bei seinem Bruder, der einst die Firma des Vaters übernommen hatte. Bolzano selbst stirbt am 18. Dezember 1848 an einer sog. »Lungenlähmung«, vermutlich in Folge einer langwierigen Lungenerkrankung.

Schon 1815 war Bolzano Mitglied der Königlich Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften geworden und 1819 schon einmal deren Direktor. Nun, nach seiner Rückkehr aus dem selbst gewählten »Exil«, schließt er sich der Gesellschaft wieder enger an und bekleidet gleich eine Reihe von Funktionen: als Direktor der mathematischen Sektion (1841–1845), als Direktor der philosophischen Sektion (1842–1845), als Direktor der neu gegründeten Sektion für Philosophie und reine Mathematik (1845–1848), und ab 1843 sogar noch einmal als Direktor der gesamten Gesellschaft.

Bolzano ist ein sehr selbständiger Denker und daher mit herkömmlichen Kategorien schwer zu fassen. So gilt er vielen als überzeugter Kantianer⁵ – und doch widmet er eine »Einschaltung« in seiner *Religionswissenschaft* einer Kritik an Kant und der nachkantischen deutschen Philosophie (RW I § 60–63). Darin entwickelt er z. B. die zentrale Unterscheidung analytischer und synthetischer Urteile anders als Kant und kritisiert dessen Erklärung des Zustandekommens synthetischer Urteile und besonders, dass Kant dabei nur diejenigen Schlüsse, die zu empirischen Urteilen führen, als Wahrscheinlichkeitsschlüsse ansieht. Und auch wenn es um die Vorbilder in der antiken Philosophie geht, lernt er zwar viel von Aristoteles, aber eben auch von den Platonikern, den Vorsokrati-

⁵ Vgl. KÜNNE, *Versuche* [2008], 315.

kern, den Stoikern u. v. a. m. Seine Belesenheit in der Philosophiegeschichte ist enorm und oft findet man in Fußnoten oder Randbemerkungen tiefgehende Interpretationsvorschläge zu griechischen oder lateinischen Originaltexten.

Bolzano hat viele spätere Entwicklungen in gewissem Umfang vorweggenommen. Das gilt sowohl für die mathematischen als auch für die philosophischen Teile seines Werkes. Das wichtigste Beispiel für die mathematische Seite aus dem vorliegenden Werk, den *Paradoxien*, ist vielleicht die Entdeckung, dass die ein-eindeutige Zuordenbarkeit auf eine echte Teilmenge ein Charakteristikum unendlicher Mengen ist. Erst ein knappes halbes Jahrhundert später wurde dies durch Cantor und Dedekind zur bis heute als Standard geltenden mathematischen Unendlichkeitsdefinition ausgebaut. Ohne hier ins Detail gehen zu können, sei noch erwähnt, dass wir bei ihm hundert Jahre vor Carnap einen ausgearbeiteten Begriff logischer Wahrscheinlichkeit finden; dass er u. a. mit seinem Begriff von »Wahrheiten an sich« schon zu Beginn des 19. Jahrhunderts dem Psychologismus den Kampf angesagt hat; dass er hundert Jahre vor Wittgenstein es als Aufgabe angesehen hat, die Philosophie von sinnlosen Begriffsstreitereien zu befreien; dass er die Relationen der Ableitbarkeit, der Begründung (»Abfolge«) und der Kausalität in aller Deutlichkeit unterschieden hat; dass er in einer Rezension auf die überragende Anwendungsbreite der unter einem allzu engen Titel publizierten Ideen des Physikers Christian Doppler hingewiesen hat; dass er in der Religionsphilosophie schwierige Fragen nach der Vereinbarkeit verschiedener Gottesprädikate auf einem Niveau bearbeitet hat, das wohl erst mit der analytischen Religionsphilosophie in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wieder erreicht worden ist; dass er auf utilitaristischer Grundlage die moralischen Imperative eines gottesfürchtigen und tugendhaften Lebens wiedergewinnen konnte; dass er die Kirche als Mittel zur Errichtung des Reiches Gottes und nicht Zweck an sich selbst angesehen, sie als solches Mittel aber als alternativlos und

dem Gemeinwohl förderlich betrachtet hat; dass er längst vor 1848 (seinem Todesjahr) überzeugter Demokrat war, von eher liberaler Gesinnung, von dem Wert von Religions- und Denkfreiheit überzeugt.⁶ Diese Liste kann keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben. Aber wenn sie einlädt, sich mit dem Denken dieses außergewöhnlichen und faszinierenden Menschen zu beschäftigen, hätte sie ihr Ziel erreicht.⁷

2. Das Werk

In den *Paradoxien des Unendlichen* will Bolzano den »Schein des Paradoxen«, der in den Augen vieler Zeitgenossen dem Unendlichkeitsbegriff anhaftet, als bloßen Schein entlarven und die Grundlage für die Akzeptanz einer mathematischen Theorie des Unendlichen sichern, die in seinen Augen in jedem Fall, in dem zu Recht vom Unendlichen die Rede ist, auf irgendeine Weise zum Tragen kommt.

Zur Orientierung im Werk ist es sinnvoll, die 70 Paragraphen der *PdU* drei Teilen zuzuordnen, die jeweils ungefähr einem Drittel des Textes entsprechen, – auch wenn diese Unterteilung nicht völlig trennscharf ist.

Im ersten Drittel (§§. 1–27) bestimmt Bolzano das Ziel der Abhandlung, entwickelt die grundlegende philosophische Begrifflichkeit und seinen eigenen Unendlichkeitsbegriff. Er wi-

⁶ Bei der Abwägung zwischen dem Gleichheitsanspruch aller Bürger eines Staates und ihren Freiheitsrechten dominierte jedoch ersterer. So hat Bolzano in seiner Utopie eines besten Staates diesem Staat durchaus das Recht zugesprochen, wissenschaftliche oder künstlerische Betätigung von Bürgern einzuschränken, so MORSCHER, *Life and Work* [2008], 117–120.

⁷ Für Informationen zu Bolzanos Leben bietet sich zunächst das autobiographische Werk BOLZANO, *Lebensbeschreibung* [1836], sowie die frühe Biographie von Gregor Zeithammer (veröffentlicht als ZEITHAMMER, *Biographie* [1997]) an. Am besten informiert ansonsten immer noch BERG/MORSCHER/GANTHALER, *Biographie* [1987]; daneben ist MORSCHER, *Life and Work* [2008], 17–27 empfehlenswert. Nicht ebenso zuverlässig, aufgrund der Ausführlichkeit aber immer noch lesenswert ist WINTER, *Lebensbild* [1969].

derlegt mögliche Einwände gegen ihn, kritisiert andere Konzeptionen und bietet eine Reihe von Beispielen für unendliche Inbegriffe – sowohl aus dem Bereich des Nichtwirklichen als auch aus dem Bereich des Wirklichen. Schließlich stellt er dar, welche Beziehungen zwischen unendlichen Mengen bzw. Größen bestehen und welche nicht bestehen können.

Im zweiten Drittel (§§. 28–49) geht es um Paradoxien des Unendlichen in der Mathematik, speziell in der allgemeinen Größen- und Zahlenlehre wie auch in deren Anwendung in der Lehre von Zeit und Raum (§§. 38–49). In diesem Zusammenhang entwickelt Bolzano auch seine Ideen für eine Rechnung mit dem Unendlichen.

Das letzte Drittel (§§. 50–70) ist Paradoxien auf dem Gebiet der Physik und der Metaphysik gewidmet, d. h. Paradoxien, die im Rahmen von Theorien über die Wirklichkeit auftreten. Bolzano entwickelt hier seine atomistische Theorie von Substanzen, ihren Kräften, ihrer räumlichen Anordnung und Bewegung.

Bolzano ist seinem Ziel, die Widerstände gegen die Rede vom Unendlichen aus dem Weg zu räumen und eine präzise, mathematische Art, von Unendlichkeit zu sprechen, zu entwickeln, recht nahe gekommen. Und doch war es ein anderer, dessen mathematische Unendlichkeitstheorie schließlich durchschlagend war: Georg Cantor (1845–1918).

Cantor hat die Mengenlehre entwickelt und eine bis heute unbeanstandete Theorie aktual unendlicher Zahlen aufgestellt. Von ihm stammt eine der ersten befriedigenden Theorien der reellen Zahlen. Gemeinsam mit Richard Dedekind hat er die beiden Unendlichkeitsdefinitionen entwickelt, die in der heutigen Mathematik Standard sind (siehe dazu unten die Anmerkung zu §. 9, S. 174).

Bolzos Werk hingegen stammt aus einer früheren Epoche, zwischen der Entwicklung der Analysis durch Leibniz und Newton und der Cantorsche Rehabilitierung des Unendlichen. Von einer »Rehabilitierung« kann man hier sprechen, da das Unendliche früher in Form unendlich kleiner

Größen in der Analysis aufgetreten war. So war zum Beispiel die Rede davon, die Tangente an eine Kurve sei eine Sekante zu zwei Punkten mit unendlich kleinem Abstand. Die vielerlei Widersprüche, in die einen die unregelmäßige Verwendung dieser Redeweise verwickelt, führte dazu, das Kind mit dem Bade auszuschütten und das Unendliche gleich völlig aus der Mathematik zu verbannen. Sprichwörtlich steht dafür das vielzitierte Diktum von Carl Friedrich Gauß (1777–1855):

Ich protestiere »zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine *façon de parler*, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen gestattet ist.

In der Bildersprache des Unendlichen [...] ist aber nichts Widersprechendes, wenn der endliche Mensch sich nicht vermisst etwas Unendliches als etwas Gegebenes und von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umfassendem betrachten zu wollen.

Sie sehen, daß hier in der That der Fragepunkt unmittelbar an die Metaphysik streift.«⁸

Insbesondere die Arbeiten von Cauchy – Bolzano teilweise gut bekannt – und die späteren Arbeiten von Weierstraß zeigten, wie man die Analysis tatsächlich ohne den problematischen Begriff unendlich kleiner Größen aufbauen konnte, nämlich mittels des Grenzwertbegriffs. Gauß umschreibt ihn in dem oben zitierten Ausschnitt als »Grenzen, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will«. So konnte die Steigung f' einer Tangente an eine Kurve f nun bestimmt werden als Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

⁸ Brief an Schumacher vom 12. 7. 1831, GAUSS, *Schumacher-Briefwechsel* [1975], 268–271.

falls dieser Grenzwert existiert – und nur dann heißt f in x differenzierbar.

Bolzano hat diese Situation recht klar erkannt, wenn man bedenkt, dass er anders als wir ja nur den einen Teil der Geschichte, nämlich das, was vor ihm geschehen war, kannte. In Bezug auf den Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik ist dies das Ziel der *PdU*: zu zeigen, dass nichts gegen eine Verwendung des Unendlichen in der Mathematik spricht, wenn man gewisse Vorsichtsmaßnahmen beachtet, die einen gegen das Auftreten von Widersprüchen schützen. Solche Widersprüche muß man in jedem Fall vermeiden. Falls sie in einem schwachen Sinne »auftreten«, muss man sie »auflösen«. Das heißt: Wenn Argumente oder Rechnungen vorgeführt werden, die auf einen Widerspruch führen, so muss man versuchen, mittels begrifflicher Differenzierungen, klarer Definitionen, strengerer Schlussfolgerungen usw. diese Widersprüche als Scheinwidersprüche zu entlarven. Denn echte Widersprüche sind bei diesem faszinierenden Thema des menschlichen Denkens nicht anzutreffen – das ist Bolzanos Grundüberzeugung. Und von daher versteht sich auch sein Verständnis von *Paradoxien*: Es handelt sich um das, was »gegen« die Meinung oder den Anschein steht, nämlich um das, was man als widersprüchlich vermeint. Eine Paradoxie ist für Bolzano also etwas, das den Anschein des Widersprüchlichen trägt, ohne wirklich widersprüchlich sein zu müssen. In Bezug auf Paradoxien des Unendlichen kann es also nur darum gehen, diesen Anschein zu beseitigen, um damit einen gewichtigen Einwand gegen das Unendliche als Gegenstand der Mathematik oder anderer Wissenschaften auszuräumen. Und genau dies ist das Anliegen der *PdU* (vgl. §. 1, S. 39).

Wenn hier hauptsächlich von der mathematischen Behandlung des Unendlichen die Rede ist, so ist das sachlich ganz angemessen, denn nach Bolzano ist eine Theorie des Unendlichen primär eine mathematische Angelegenheit. Wie verhält es sich dann mit den anderen Wissenschaften, die vom Unendlichen sprechen, wie etwa der Philosophie oder

der Theologie? Es ist ja zum Beispiel von der »Unendlichkeit Gottes« die Rede, von der »Endlichkeit unseres Erkenntnisvermögens« oder der »Endlichkeit des Denkens«. Bolzano argumentiert in den *PdU* dafür, dass all diese anderen Begriffsverwendungen entweder Fehlverwendungen sind oder mit einem mathematisch-quantitativen Unendlichkeitsbegriff zusammenhängen. Etwas genauer gesagt ist Bolzano der Ansicht, dass wir nur da zu Recht von der Unendlichkeit einer Sache sprechen, wo wir auch Merkmale finden, die quantitativ unendlich sind. Er behauptet damit strenggenommen nur, dass in jedem Fall, wo von Unendlichkeit gesprochen werden kann, auch quantitative Unendlichkeit vorliegt. Er behauptet nicht, dass man die möglicherweise vorhandenen anderen Arten von Unendlichkeit auf die quantitative reduzieren kann. Andernorts habe ich zu zeigen versucht, dass gewisse Spannungen in Bolzanos Lehre von der Unendlichkeit Gottes darauf hindeuten, dass vielmehr ein allgemein-philosophischer Unendlichkeitsbegriff im Hintergrund seiner Überlegungen stand.⁹

Es geht in diesem Bändchen also hauptsächlich um philosophische Betrachtungen über Mathematisches und den teilweise problematischen Umgang mit der Unendlichkeit in der früheren Mathematik. Es geht aber auch um die Unendlichkeit Gottes und, jedenfalls kurz, um anderes, das manche Philosophen unter dem »Unendlichen« verstehen wollten.

Man wird in der Einleitung noch sagen müssen, worum es in den *PdU* *nicht* geht: Bolzano beschäftigt sich mit einer ganzen Reihe von historisch diskutierten Paradoxien, die mit dem Unendlichen zu tun haben, aber bei weitem nicht mit allen, z. B. nicht mit den berühmten Zenonschen Paradoxien (die berühmteste, den Wettlauf von Achilles und der Schildkröte, löst er jedoch in *WL* III § 377.7 auf). Man kann nur spekulieren, warum Bolzano sie nicht berücksichtigt hat. Vielleicht war ihm zu offensichtlich, dass es sich im Allgemeinen um »non-

⁹ Siehe TAPP, *Beobachtungen* [2011].