Perspektiven der Mathematikdidaktik

Gabriele Kaiser, Rita Borromeo Ferri, Werner Blum *Hrsg.*

RESEARCH

Ulrich Böhm

Modellierungskompetenzen langfristig und kumulativ fördern

Tätigkeitstheoretische Analyse des mathematischen Modellierens in der Sekundarstufe I

Springer Spektrum

Perspektiven der Mathematikdidaktik

Herausgegeben von
G. Kaiser, Hamburg, Deutschland
R. Borromeo Ferri, W. Blum, Kassel, Deutschland

In der Reihe werden Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert, die diese Felder empirisch untersuchen, qualitativ oder quantitativ orientiert. Die Publikationen sollen daher auch Antworten zu drängenden Fragen der Mathematikdidaktik und zu offenen Problemfeldern wie der Wirksamkeit der Lehrerausbildung oder der Implementierung von Innovationen im Mathematikunterricht anbieten. Damit leistet die Reihe einen Beitrag zur empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik und zu sich daraus ergebenden Forschungsperspektiven.

Ulrich Böhm

Modellierungs-kompetenzen langfristig und kumulativ fördern

Tätigkeitstheoretische Analyse des mathematischen Modellierens in der Sekundarstufe I

Springer Spektrum

Ulrich Böhm
Technische Universität Darmstadt
Deutschland

Dissertation Technische Universität Darmstadt, Deutschland, 2012

D 17

ISBN 978-3-658-01820-7 ISBN 978-3-658-01821-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-01821-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

Geleitwort

Ulrich Böhm hat nach seinem ersten Staatsexamen in Mathematik und Sport für das gymnasiale Lehramt seit 2007 als Assistent in der AG Fachdidaktik sehr erfolgreich am Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt gearbeitet und nun mit einer anspruchsvollen theoretischen Grundlagenarbeit zur Didaktik der Mathematik promoviert. Die hier vorliegende Arbeit greift das für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I normativ gesetzte und zunächst nicht weiter ausdifferenzierte, eher grundsätzliche Ziel des Erwerbs von Modellierungskompetenz auf und fragt danach, auf der Grundlage welcher Vorstellungen von kognitiven Prozessen des mathematischen Modellierens schließlich didaktische Konzepte entwickelt werden können, um langfristig (und nachhaltig) Modellierungskompetenz auszubilden.

Ulrich Böhm arbeitet als grundlegendes theoretisches Defizit für die Implementierung der Bildungsstandards fehlende theoretisch fundierte Kompetenzentwicklungsmodelle heraus. Hier setzt seine Arbeit mit einem tätigkeitstheoretischen Ansatz an. Die zur Förderung von Modellierungskompetenz durchaus reichhaltige Literatur sowie empirische Studien werden gleich zu Beginn der Arbeit vor dem Hintergrund der Frage nach einem fundierten Kompetenzentwicklungsmodell eingeordnet. Tatsächlich muss der aktuelle Erkenntnisstand zum mathematischen Modellieren in der Schule trotz vielfältiger Bemühungen um geeignete Aufgaben und um das Verständnis und Beobachten von Herangehensweisen von Lernenden beim Modellieren als eher phänomenologisch eingeordnet werden. In einigen Bereichen gibt es bereits Klassifikationen, z.B. zu verschiedenen Arten des Modellierens und zu entsprechenden Aufgaben. Das sind wichtige Voraussetzungen für den nächsten, jetzt anstehenden Schritt zur Theoriebildung, über die Aufklärung der Kompetenzstruktur zu möglichen Kompetenzentwicklungsmodellen im mathematischen Modellieren zu gelangen.

Ulrich Böhm hat sich dafür entschieden, Grundlagen bereitzustellen, die geeignet sind, curriculare Zielvorstellungen zum mathematischen Modellieren in der Sekundarstufe I zu begründen. Die gewählte Zielstellung für die Arbeit ist schulpraktisch und fachdidaktisch hoch relevant, um Bestrebungen zur Implementierung der Bildungsstandards überhaupt ausreichend theoretisch zu fundieren. Die Arbeit berücksichtigt den aktuellen Erkenntnisstand, da es zunächst darauf ankommt, die beim Modellieren wünschenswerten und die real ablaufenden kognitiven Prozesse schlüssig beschreiben zu können.

Mit Hilfe des entwickelten Theorierahmens zur Analyse von Modellierungsaktivitäten ist eine differenzierte modellhafte Beschreibung der Handlungselemente beim mathematischen Modellieren möglich. Dabei gelingt auch das Einbeziehen und Aufklären von Problemlöseaktivitäten beim Modellieren, was einen deutlichen Erkenntnisfortschritt darstellt. So werden auch unterschiedliche Bearbeitungsniveaus von Schülerinnen und Schülern beschreibbar. Die Verknüpfung des entwickelten Theorierahmens mit dem Grundvorstellungskonzept führt bei anspruchsvolleren Mathematisierungen zu der wertvollen Erkenntnis, dass die Distanz zwischen Realsituation und einem passenden mathematischen Modell überwunden bzw. eine solche Passung hergestellt werden muss. Damit wird ein potenziell stufenbildendes Unterscheidungsmerkmal für mathematische Modellierungen generiert.

Ulrich Böhm hat mit seiner Arbeit einen wesentlichen Beitrag dazu geleistet, dass auch Kompetenzstufenmodelle künftig nicht mehr rein empirische Konstrukte bleiben müssen, sondern eine theoretische Dimension für sich in Anspruch nehmen können. Ohne elaborierte Vorstellungen über schwierigkeitsgenerierende Faktoren und kognitive Anforderungen in Aufgaben sind auch Lernentwicklungsprozesse nicht beschreibbar. Hierfür bietet die Arbeit einige wertvolle Ideen wiederum aus dem Tätigkeitskonzept, jetzt aber in Verbindung mit dem Grundvorstellungskonzept und schließlich mit dem spielgemäßen Konzept für die unterrichtliche Umsetzung.

Möge diese Arbeit Theoriebildungsprozesse und entsprechende konstruktive Diskussionen dazu in der Didaktik der Mathematik wieder beleben und auch voranbringen!

Regina Bruder

Danksagung

Mein erster Dank für eine großartige Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit gilt meiner Doktormutter Prof. Dr. Regina Bruder, die den gesamten Entstehungsprozess dieser Arbeit betreut und unterstützt hat. Ein besonderer Dank gilt auch Frau Prof. Dr. Katja Maaß, die als international anerkannte Expertin zum mathematischen Modellieren als zweite Referentin ein Gutachten zu dieser Arbeit erstellt und im Entstehungsprozess durch einige Impulse Einfluss auf die Arbeit genommen hat.

Des Weiteren gilt ein besonderer Dank Frau Prof. Dr. Katja Lengnink, die im Laufe meines Studiums meine Neugier für fachdidaktische Fragen zum Lehren und Lernen von Mathematik gefördert hat und sich immer wieder für meine Arbeit interessiert hat.

Für sehr gewinnbringende Gespräche und den gedanklichen Austausch zu verschiedenen Aspekten dieser Arbeit danke ich Prof. Dr. Wolfram Meyerhöfer, Prof. Dr. Andreas Filler, Prof. Dr. Guido Pinkernell, Prof. Dr. Martin Kiehl, Kristina Richter, Sandra Gerhard, Julia Reibold, Oliver Schmitt und allen Mitgliedern und ehemaligen Mitgliedern der AG Didaktik.

Ein weiteres Dankeschön gilt Nadine Jacksteit für das Korrekturlesen sowie Britta Göhrisch-Radmacher für die Unterstützung bei der Fertigstellung der Druckversion.

Abschließend danke ich meiner ganzen Familie. Ohne Eure Unterstützung wäre es mir nicht möglich gewesen, diese Arbeit zu schreiben.

Ulrich Böhm

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

> Now what would a curriculum look like? (. . .) If I were at your wonderful meeting in Dortmund, I would be listening for ideas, no, I would be pestering you for ideas.
>
> *(Pollak, 2007, S. 120)*

1.1 Ausgangssituation

Anwendungs- und Realitätsbezüge haben im Mathematikunterricht und in der Mathematikdidaktik eine lange Tradition. Greefrath (2010, S. 23f) verweist auf Sachaufgaben im Rechenbuch von Adam Ries aus dem 16. Jahrhundert. Eine Darstellung nationaler und internationaler Entwicklungen in der didaktischen Diskussion über Anwendungs- und Realitätsbezüge seit Ende des 19. Jahrhunderts findet man bei Kaiser-Meßmer (1986). Mit dem Begriff *mathematisches Modellieren*, der erst seit einigen Jahren in der deutschsprachigen didaktischen Diskussion gebräuchlich ist (vgl. Blum, 2007, S. 3), wird diese Diskussion über Anwendungs- und Realitätsbezüge fortgesetzt (vgl. Kaiser & Sriraman, 2006; Borromeo Ferri & Kaiser, 2008).

Seit der Einführung der KMK-Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Schulabschluss gehört das mathematische Modellieren zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen (vgl. Kultusministerkonferenz [KMK], 2004, S. 7f). Diese Kompetenzen sollen im Lauf der Sekundarstufe I systematisch und kumulativ erworben werden (vgl. KMK, 2004, S. 3). Mit den KMK-Bildungsstandards ist der Anspruch zur Bereitstellung einer Orientierungsfunktion verbunden. Nach Klieme et al. (2003, S. 71) sollen Standards und Kompetenzmodelle „Modellvorstellungen über den Erwerb von Kompetenzen“ bereitstellen und „Wege zum Wissen und Können“ aufzeigen.

Die folgende Ausgangsthese für diese Arbeit benennt jedoch Zweifel, ob die geforderte Orientierung für einen systematischen und kumulativen Kompetenzaufbau zur Zeit eingelöst wird:

Ausgangsthese: Gegenwärtig wird die geforderte Orientierung für einen systematischen und kumulativen Aufbau der Kompetenz mathematisch Mo-

U. Böhm, *Modellierungskompetenzen langfristig und kumulativ fördern,* Perspektiven der Mathematikdidaktik, DOI 10.1007/978-3-658-01821-4_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

dellieren innerhalb der Sekundarstufe I nicht eingelöst. Dies liegt an unzureichenden Kenntnissen über die langfristige Entwicklung von Modellierungskompetenzen und an unzureichenden Modellvorstellungen über den kognitiven Prozess des mathematischen Modellierens.

Dass die geforderte Orientierung für einen langfristigen, systematischen und kumulativen Aufbau von Modellierungskompetenzen aktuell nicht eingelöst wird, lässt sich exemplarisch am neuen hessischen Kerncurriculum (Hessisches Kultusministerium, 2011) belegen. Dort werden zwar für die Klassenstufen 6 und 8 sowie für das Ende der Sekundarstufe I lernzeitbezogene Kompetenzerwartungen formuliert, in den Formulierungen dieser Kompetenzerwartungen ist jedoch keine substanzielle Progression für das mathematische Modellieren erkennbar. Somit bietet das hessische Kerncurriculum keine Orientierung zur Realisierung eines langfristigen, systematischen und kumulativen Aufbaus von Modellierungskompetenzen innerhalb der Sekundarstufe I.

Im Folgenden werden unzureichende Kenntnisse über die Kompetenzentwicklung als mögliche Ursache diskutiert, um die Ausgangsthese zu erhärten. So benennt etwa Reiss (2009) ein zentrales Defizit, das sie als vorrangiges Desiderat bezeichnet:

> Noch immer wissen wir viel zu wenig über die Entwicklungsprozesse mathematischer Kompetenz. Es ist daher von wesentlicher Bedeutung, gezielt an entsprechenden Kompetenzstruktur- und Kompetenzentwicklungsmodellen zu arbeiten. Die bereits vorliegenden Studien sind ein wichtiger, aber keinesfalls ein ausreichender Schritt (Reiss, 2009, S. 200).

Dass diese Problemlage auch für die Entwicklung und Förderung von Modellierungskompetenzen gültig ist, lässt sich durch Pollak (2007) belegen, wenn er mit Blick auf die Förderung von Modellierungskompetenzen im Rahmen eines Konferenzbeitrags zum mathematischen Modellieren schreibt: „Now what would a curriculum look like? (...) If I were at your wonderful meeting in Dortmund, I would be listening for ideas, no, I would be pestering you for ideas“ (Pollak, 2007, S. 120).

Insbesondere für die Kompetenz mathematisch Modellieren kann mit Blick auf die theoretischen Grundlagen des Kompetenzmodells der Bildungsstandards im Fach Mathematik eine mögliche Ursache für dieses Defizit gefunden werden. Das Kompetenzmodell der Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik stützt sich auf drei Modelle. Diese sind

1. die Principles and Standards (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000), 2. das PISA-Rahmenkonzept Mathematik (OECD, 2003b), und 3. das Konzept mathematischer Kompetenz aus dem dänischen KOM-Projekt (Niss, 2003a) (vgl. Ehmke, Leiß, Blum & Prenzel, 2006, S. 223; Blum, 2006a, S. 19f; Blum, o.J., S. 1). Hinterfragt man den Zweck dieser verschiedenen Modelle, wird deutlich, dass nur die Principles and Standards die Realisierung einer systematischen Förderung über mehrere Jahrgangsstufen hinweg zum Ziel hat (vgl. NCTM, 2000, S. 6f; Engel, 2000, S. 72). Allerdings sucht man in den Principles and Standards vergeblich nach dem mathematischen Modellieren. Somit können die Principles and Standards nicht herangezogen werden, um die geforderte Orientierungsfunktion für das mathematische Modellieren einzulösen.

Das mathematische Modellieren findet sich als Kompetenz im PISA-Framework (vgl. OECD, 2003b, S. 26) und im Rahmen des KOM-Projekts (vgl. Niss, 2003b, S. 218f) wieder. Die hier verwendeten Modelle haben jedoch eigene Ziele und Zwecke, die nicht unmittelbar auf eine Konkretisierung einer langfristigen und kumulativen Kompetenzentwicklung abzielen.

Das Konzept, das im KOM-Projekt entwickelt wurde, soll ein Vokabular bereitstellen und Inspirationen liefern, um die Frage mathematischer Bildung auf der Grundlage mathematischer Aktivitäten und übergreifenden mathematischen Ideen auf allen Stufen im Bildungssystem diskutieren zu können. Das KOM-Projekt stellt also keine curriculare Umsetzung dar, es ist vielmehr eine theoretische Grundlage, die zentrale Aspekte mathematischer Literalität beschreibt (vgl. Niss, 2003a; Niss, 2003b, S. 7-9). Niss (2003a, S. 12) nennt zwei Zielrichtungen für den Gebrauch der Kompetenzen: zum einen den normativen Zweck, indem beschrieben wird, was mathematische Bildung auszeichnet, jedoch curricular noch spezifiziert werden muss, zum anderen einen deskriptiven Zweck, um Lernprozesse und Lernergebnisse, mathematische Curricula und Konzepte mathematischer Bildung beschreiben und vergleichen zu können. Anhand des Konzeptes aus dem KOM-Projekt lässt sich somit zwar eine Vision für Ziele mathematischer Bildung ableiten, eine Realisierung, etwa in Form von Curricula, ist jedoch nicht Gegenstand des Projektes.

In Rahmen von PISA soll gemessen werden, ob es Lernenden gelingt, das im Mathematikunterricht Gelernte im täglichen Leben anwenden zu können. Das Verfügen über solche Fähigkeiten und Fertigkeiten wird dann im Rahmen von PISA als „mathematical literacy“ bezeichnet (vgl. OECD, 2003b, S. 24). Im mathematics framework zur Erfassung der mathematical literacy spielt das mathematische Modellieren (mathematising), das durch ein Kreislaufschema beschrieben wird, eine zentrale Rolle (vgl. OECD, 2003b, S. 26; Blum, Neubrand et al., 2004, S. 48). Für das Rahmenkonzept von PISA stellen Klieme et al. (2003, S. 77) jedoch fest:

> Die Kompetenzstufen-Modelle von TIMSS und PISA sind beispielsweise dezidiert nicht als Entwicklungsmodelle gedacht, sondern als Beschreibung von Niveaustufen der mathematischen Kompetenz innerhalb der untersuchten Schülerpopulation.

Auch Brand, Hofmeister und Tramm (2005, S. 5) sind der Auffassung, dass empirisch gewonnene Kompetenzstufen nicht mit Entwicklungsmodellen gleichzusetzen sind, „denn aus der Tatsache der Abstufung ergibt sich weder zwingend, dass der individuelle Entwicklungsprozess der Abfolge dieser Niveaustufen folgt, noch, dass es didaktisch geboten wäre, Sequenzen entlang dieser Stufung zu konzipieren."

Eine zweite Ursache, die einer erfolgreichen Umsetzung der Orientierungsfunktion für das mathematische Modellieren im Wege steht, ist die aktuell unzureichende Kenntnislage über kognitive Aspekte des mathematischen Modellierens. So liegt dem Beitrag von Niss (2010) ebenfalls das Motiv zugrunde, den kognitiven Prozess beim mathematischen Modellieren und insbesondere den Prozess zur Erarbeitung eines mathematischen Modells besser zu beschreiben, um auf Grundlage solcher Modellvorstellungen Konsequenzen für den Erwerb und die Vermittlung von Modellierungskompetenzen ziehen zu können.

Zwar gibt es inzwischen verschiedene Studien und Beiträge, die das mathematische Modellieren aus kognitiver Perspektive studieren, jedoch liegt bislang keine umfassende Modellvorstellung über den kognitiven Prozess vor. So werden in den Arbeiten wichtige Aspekte benannt und relevante Phänomene beschrieben, eine Integration der Erkenntnisse steht jedoch aus. Einen Überblick über Studien mit einer kognitiven Perspektive zum mathematischen Modellieren findet man bei Borromeo Ferri (2011, S. 23-40). Für diese Arbeiten zentral sind die Studien von Borromeo Ferri (2011), der Beitrag von Niss (2010), der Beitrag von Lesh und Doerr (2003) und ergänzend die Arbeit von Treilibs (1979).

Bei Treilibs (1979) liegt der Schwerpunkt der Analyse auf dem Prozess der Übersetzung der außermathematischen Situation in ein mathematisches Modell. Diese Handlung nennt er *formulation process*. Diese Phase hält er für die schwierigste im Bearbeitungsprozess. Im Rahmen der Studie werden die Bearbeitungsprozesse von ungeübten und fortgeschrittenen Lernenden im Modellieren beobachtet und rekonstruiert (vgl. Treilibs, 1979, S. 3). Als Ergebnisse der Studie werden interessante Unterschiede zwischen den Bearbeitungsprozessen von ungeübten und fortgeschrittenen Lernenden beschrieben (vgl. Treilibs, 1979, S. 59-68). Einige der von Treilibs (1979) für das Modellbilden beobachteten Phänomene lassen sich jedoch anhand der gegenwärtig in Form von Modellierungskreisläufen verbreiteten Modellvorstellung[1] über den Prozess des mathematischen Modellierens nicht befriedigend erklären.

Auch Borromeo Ferri (2011) analysiert Lösungsprozesse bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben. Beschrieben werden individuelle Modellierungsrouten und Gruppenverläufe bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben. Dabei werden die individuellen Modellierungsrouten mit individuellen Denkstilen in Beziehung gesetzt. Die beschriebenen Phänomene wie Minikreisläufe und der Bezug zu individuellen Denkstilen ist eine bedeutende und interessante Erkenntnis, die durchaus auch die vorherrschende Modellvorstellung zum Prozess des mathematischen Modellierens in Frage stellt. Diese Erkenntnisse werden von Borromeo Ferri (2011) jedoch nicht genutzt, um die Modellvorstellungen über den kognitiven Prozess beim mathematischen Modellieren und insbesondere zum Prozess der Übersetzung der außermathematischen Situation in ein mathematisches Modell neu zu modellieren.

Eine solche „andere“ Modellvorstellung lässt sich bei Lesh und Doerr (2003) finden. Auf Grundlage ihrer Beobachtungen beschreiben Lesh und Doerr (2003) den Prozess der Modellbildung als zyklischen und iterativen Prozess, in dem mit Hilfe verschiedener Repräsentationsformen verschiedene Interpretationen der außermathematischen Situation entwickelt und getestet werden, bis schließlich ein stabiles System für eine umfassende Interpretation gefunden wird.

Es ist sehr interessant, dass in allen genannten Arbeiten ein zyklischer Prozess bei der Bearbeitung von Modellierungsproblemen beobachtet wird (vgl. Treilibs, 1979, S. 68; Borromeo Ferri, 2011, S. 146; Lesh & Doerr, 2003, S. 17). Doch lediglich Lesh und Doerr (2003) entwickeln eine Modellvorstellung, mit der dieses Phänomen erklärt werden kann.

[1] An dieser Stelle wird darauf verzichtet, die konkreten Modellvorstellungen zum Prozess des mathematischen Modellierens vorzustellen. Natürlich bleibt damit die Kritik an dieser Stelle unscharf. Im Laufe der Arbeit wird jedoch an entsprechender Stelle (z.B. auf Seite 166 oder 176) die Kritik, nachdem notwendige begriffliche Grundlagen bereitgestellt und einzelne Phänomene beschrieben wurden, wieder aufgegriffen.

1.2 Desiderat, Ziele und erkenntnisleitende Fragestellungen

Aus der im vorangehenden Absatz genannten und erhärteten Ausgangsthese ergibt sich das folgende, für diese Arbeit zentrale, Desiderat:

Desiderat: Die von Klieme et al. (2003, S. 9) geforderte Orientierungsfunktion für die allgemeine mathematische Kompetenz *mathematisch Modellieren* der KMK-Bildungsstandards (vgl. KMK, 2004, S. 8) wird zur Zeit nicht in notwendigem Maße erfüllt und die fachdidaktischen Erkenntnisse über das mathematische Modellieren sind zur Zeit nicht ausreichend, um die notwendige Orientierung für eine langfristige und kumulative Kompetenzförderung geben zu können.

Damit für das mathematische Modellieren die geforderte Orientierungsfunktion eingelöst werden kann, ist erhebliche Entwicklungsarbeit mit folgenden Zielen nötig:

- Als Voraussetzung zur Einlösung der Orientierungsfunktion müssen die Modellvorstellungen über den Prozess des mathematischen Modellierens weiter entwickelt werden, so dass insbesondere der zentrale Prozess der Modellbildung plausibel beschrieben wird.
- Ein Kompetenzstrukturmodell, in dem die Vorstellungen über die kognitiven Prozesse berücksichtigt sind, muss als Konkretisierung des Lerngegenstands für den langfristigen und kumulativen Aufbau erarbeitet werden.
- Aufbauend auf dieser Grundlage ist ein Modellierenteilcurriculum für die Sekundarstufe I als Vorschlag zur langfristigen, systematischen und kumulativen Förderung der Kompetenz mathematisch Modellieren zu erarbeiten.

In Verbindung mit den genannten Zielen steht die zentrale Forschungsfrage dieser Arbeit:

Forschungsfrage: Wie kann die Kompetenz mathematisch Modellieren innerhalb der Sekundarstufe I über die Klassenstufen hinweg systematisch und kumulativ gefördert und entwickelt werden?

Diese Frage zielt darauf ab, der Orientierungsfunktion von Kompetenzmodellen, im Sinne eines Kompetenzentwicklungsmodells für die Förderung von

Modellierungskompetenzen, Konturen zu geben und präzisiert die für dieses Promotionsvorhaben in Böhm (2009, S. 483) formulierte Forschungsfrage. Aus dieser Frage ergeben sich weitere erkenntnisleitende Fragen, denen nachgegangen werden muss. Dies sind zunächst Fragen an den Forschungsgegenstand, also das mathematische Modellieren:

Frage 1.1 Was ist mit „mathematischem Modellieren“ gemeint?

Frage 1.2 Wie kann der zentrale kognitive Prozess der Modellbildung, also die Übersetzung eines außermathematischen Problems in ein mathematisches Modell, modellhaft erklärt werden?

Frage 1.3 Welches Wissen und Können ist für eine erfolgreiche Bearbeitung von Modellierungsanforderungen notwendig?

Diese ersten Forschungsfragen müssen zunächst beantwortet werden, um Vorstellungen über das notwendige Wissen und Können als Elemente der Struktur von Modellierungskompetenzen zu gewinnen. Erst aufbauend auf einem so entwickelten Kompetenzstrukturmodell[2] können Vorschläge zur langfristigen und kumulativen Förderung von Modellierungskompetenzen entwickelt werden. Diese Vorschläge sollen einen Beitrag leisten, die geforderte Orientierungsfunktion einzulösen. Zur Erarbeitung eines solchen Vorschlags ist eine weitere erkenntnisleitende Frage für diese Arbeit notwendig:

Frage 2.1 Wie können die im Kompetenzstrukturmodell beschriebenen Inhalte als Lerngegenstände über mehrere Klassenstufen sinnvoll strukturiert werden, um einen systematischen und kumulativen Kompetenzerwerb zu ermöglichen?

1.3 Mathematikdidaktik als Design Science

Die zuvor genannten Ziele für diese Arbeit verlangen eine Theorieentwicklung. Eine solche Theorieentwicklung, die als übergeordnetes Ziel die Entwicklung eines Modellierenteilcurriculums hat, lässt sich in einer als Design Science

[2] Eine Präzisierung des Begriffs *Kompetenzstrukturmodell* für diese Arbeit wird in Kapitel 4 ab Seite 117 vorgenommen.

verstandenen Fachdidaktik verorten. Das übergeordnete Motiv einer so verstandenen Fachdidaktik ist die Weiterentwicklung des Unterrichts, auch durch die Erarbeitung theoretischer Konzepte.

Nach Lesh und Sriraman (2005, S. 490) hat die Fachdidaktik Mathematik als ein junges, wissenschaftliches Gebiet noch keine einheitlichen Theorien und Methoden sowie keine kohärenten und klar abgegrenzten Sammlungen von vorrangigen Forschungsfragen und Problemen. Mit Blick auf die vielfältigen Forschungsaktivitäten innerhalb der Fachdidaktik Mathematik stehen verschiedene Möglichkeiten offen, wie sich Fachdidaktiker identifizieren können:

> Should mathematics education researchers think of themselves as being applied educational psychologists, or applied cognitive psychologists, or applied social scientists? Should they think of themselves as being like scientists in physics or other „pure“ sciences? Or, should they think of themselves as being more like engineers or other „design scientists“ whose research draws on multiple practical and disciplinary perspectives - and whose work is driven by the need to solve real problems as much as by the need to advance relevant theories? (Lesh & Sriraman, 2005, S. 490)

Lesh und Sriraman (2005, S. 490) schlagen vor, die Fachdidaktik Mathematik als Design Science zu konzeptualisieren. Dieser Vorschlag ist allerdings weder in der nationalen noch in der internationalen fachdidaktischen Diskussion völlig neu. So gibt es bis in die 1990er Jahren einige Veröffentlichungen, in denen die Entwicklungsarbeit als zentrale Aufgabe der Fachdidaktik genannt, begründet und illustriert wird. Einflussreich für die Mathematikdidaktik sind etwa die Beiträge von Wittmann (1974), Freudenthal (1991), Gravemeijer (1994) oder Artigue (1994). Zwar unterscheiden sich diese Beiträge in den Begrifflichkeiten für die Art und Weise der Forschung, hinsichtlich der Ziele und der Motive gibt es jedoch große Übereinstimmungen.

So versteht Wittmann (1974) die Fachdidaktik Mathematik als Ingenieurswissenschaft und Artigue (1994) bezeichnet die Forschungsaktivität als „Didactic engineering“. Gravemeijer (1994) spricht von „Educational Development and Developmental Research“. Burkhardt (2006a) verwendet den Begriff „design research“ und „engineering research“. Die Bezeichnung „Design Science“ findet man u.a. bei Wittmann (1995, 1998) und Lesh und Sriraman (2005).

Unabhängig vom Fach Mathematik werden für fachdidaktische und erziehungswissenschaftliche Entwicklungsforschung auch die Bezeichnungen „Design-Based Research“ (Themenheft: Journal of the Learning Sciences 13(1), 2004) oder „Educational Design Research“ (vgl. van den Akker, Gravemeijer, McKenney & Nieveen, 2006b) verwendet. Gegenwärtig hat es den

Anschein, dass sich die letztgenannten Bezeichnungen international durchsetzen könnten (vgl. van den Akker, Gravemeijer, McKenney & Nieveen, 2006a).

Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch am Begriff *Design Science* im Sinne von Wittmann festgehalten. In diesem wittmannschen Sinne der Fachdidaktik wird das zugrundeliegende zentrale Motiv, einen Beitrag zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts zu leisten, deutlich (vgl. u.a. Wittmann, 1998, S. 330; Freudenthal, 1991, S. 164; Lesh & Sriraman, 2005, S. 494). Dabei ist der Gegenstand der Entwicklungsarbeit und der methodische Rahmen zur Einlösung dieses Anspruchs deutlich weiter gefasst als dies im Rahmen des neueren Verständnisses von „design research“ oder „design-based research“ der Fall ist. So sehen etwa Wittmann (1998, S. 330) und Lesh und Sriraman (2005, S. 494) sowohl in der Theorieentwicklung als auch in der Curriculumsentwicklung einen wesentlichen Gegenstand einer als Design Science verstandenen Fachdidaktik. Es geht also nicht nur um die konkrete Entwicklung, Evaluation und Weiterentwicklung von unmittelbar unterrichtsrelevanten Materialien oder Lernumgebungen, wie es in einem engeren Verständnis etwa von „design research“ nach Burkhardt (2006b) der Fall ist.

Ein solcher Anspruch zur Durchführung eines zyklischen und iterativen Designprozesses, der die Entwicklung, Evaluation und Überarbeitung verlangt (vgl. van den Akker et al., 2006b, S. 5), ist für den ausgewählten Forschungsgegenstand im Rahmen dieser Arbeit ohnehin nicht einlösbar. Im Rahmen dieser Arbeit kann jedoch im Sinne des integrative learning design framework (ILD-Framework) nach Bannan-Ritland (2003) insbesondere im Sinne der Theorieentwicklung im ersten der drei wesentlichen Abschnitte (1. informed exploration, 2. enactment und 3. evaluation) ein substanzieller Beitrag geleistet werden.

Dabei soll in dieser Arbeit die theoretische Fundierung durch die Tätigkeitstheorie dazu beitragen, den Anspruch von Lesh und Sriraman (2005, S. 494) einzulösen, wenn sie fordern, dass es bei der Entwicklung curricularer Innovationen bedeutsam ist, erklären zu können, warum und wie die Innovation wirksam werden soll bzw. werden kann.

1.4 Zum methodischen Vorgehen als theoriegestützte Theorieentwicklung

Die Bearbeitung der formulierten Fragen zur Erreichung der für die Arbeit genannten Ziele erfolgt theoriegestützt und hat theoretische Konzepte zum Ergebnis. Dabei spielen beide von Prediger (2010, S. 169f) genannten Konzeptualisierungen von Theorien eine Rolle. Die Bearbeitung des Forschungsgegenstands erfolgt dabei insbesondere anhand der Tätigkeitstheorie als *Hintergrundtheorie*. Die in der Arbeit entwickelten Konzepte, Vorstellungen und Begriffe entsprechen dann der *Theorie als Beschreibungsmittel*. Da anschließend zur Entwicklung des Modellierenteilcurriculums mit den in der Arbeit entwickelten Modellvorstellungen weiter gearbeitet wird, werden diese dann wieder zu einer Hintergrundtheorie. Innerhalb der Arbeit lassen sich verschiedene Theorieebenen identifizieren und benennen.

Ausgehend vom Forschungsgegenstand, dem mathematischen Modellieren auf Ebene 1, wird die Tätigkeitstheorie auf Ebene 2 als Hintergrundtheorie genutzt, um das mathematische Modellieren zu analysieren. Dazu ist es zunächst notwendig, das mathematische Modellieren als Tätigkeit zu charakterisieren. Anschließend können konkrete Phänomene des mathematischen Modellierens verallgemeinert als Tätigkeit analysiert, beschrieben und verstanden werden.

Dabei wird die Tätigkeitstheorie im Sinne von Giest und Lompscher (2006, S. 11) „als offener theoretischer Rahmen, der es gestattet, die Konturen des angestrebten Gesamtbildes zu entwerfen, ohne zu eng zu sein, um die Aufnahme von Bezügen zu anderen Theorieansätzen zu verhindern“, verstanden. Von den zahlreichen in der Tätigkeitstheorie enthaltenen theoretischen und wissenschaftlichen Perspektiven sind im Rahmen dieser Arbeit die Modelle geistiger Operationen nach Galperin (1967, 1973) sowie das theoretische Denken (siehe Giest & Lompscher, 2006, S. 217-227) als kognitionspsychologische Perspektive, die Vorstellungen zur Orientierung und Regulation der Tätigkeit nach Kossakowski und Lompscher (1977) als handlungspsychologische Perspektive und die Theorie der Lerntätigkeit nach Giest und Lompscher (2006) als Perspektive der pädagogischen Psychologie als Hintergrundtheorien von zentraler Bedeutung. In der Tätigkeitstheorie lassen sich auch entwicklungspsychologische Grundlagen (siehe Kossakowski et al., 1987) finden. Im Rahmen dieser Arbeit treten diese Aspekte jedoch hinter die Analyse des Lerngegenstands und einer auf Grund des Lerngegenstands begründeten

Systematik für die langfristige Förderung zurück.

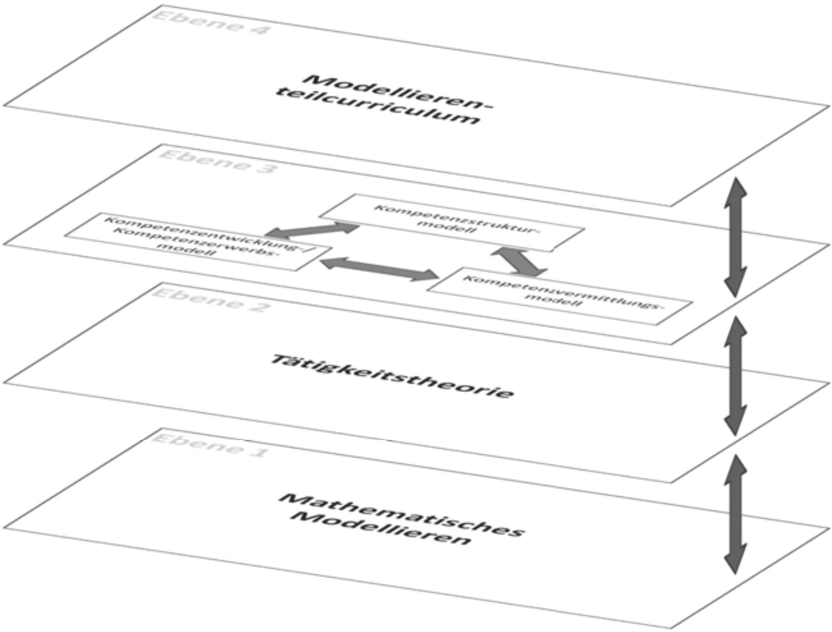

Abbildung 1.1: Schematische Darstellung der verschiedenen Theorieebenen im Rahmen der Arbeit

Diese tätigkeitstheoretischen Grundlagen werden als Hintergrundtheorie genutzt, um zum einen eine Modellvorstellung des Modellbildungsprozesses zu entwickeln (siehe Abschnitt 5.5), die insbesondere die wiederholt beobachteten und in der Literatur beschriebenen zyklischen Bearbeitungsprozesse berücksichtigt und zum anderen, um ein Kompetenzstrukturmodell zur Beschreibung der Anforderungsstruktur zu entwickeln (siehe Kapitel 6). Dabei wird die Modellvorstellung über den Modellbildungsprozess im Kompetenzstrukturmodell aufgegriffen.

Die so entwickelten Modellvorstellungen und das Kompetenzstrukturmodell stellen Theorien als Beschreibungsmittel in dieser Arbeit dar und liegen auf Ebene 3. Ebenfalls auf Ebene 3 liegt ein weiterer Theoriebaustein, das spielgemäße Konzept, der als Rahmen für die langfristige und kumulative Förderung von Modellierungskompetenzen genutzt wird und somit gewissermaßen ein Vermittlungsmodell bereitstellt, das mit Blick auf das Kompetenzstrukturmodell Ideen für ein Kompetenzentwicklungs- bzw. Kompetenzerwerbsmodell liefert (siehe Abschnitt 7.1).

Diese theoretischen Bausteine auf Ebene 3 werden schließlich ihrerseits zu einer Hintergrundtheorie für die Erarbeitung des Modellierenteilcurriculums und einer exemplarischen Konkretisierung einzelner Aspekte. Die Vorschläge zur Realisierung der Orientierungsfunktion liegen schließlich auf der vierten und letzten Ebene (siehe Kapitel 8).

Abbildung 1.1 stellt diese Ebenen schematisch dar. Dabei stehen die Ebenen sowie insbesondere die Elemente auf Ebene 3 in einer starken wechselseitigen Beziehung.

1.5 Inhalt der Arbeit

Die zuvor beschriebenen Theorieebenen verweisen auch auf die inhaltliche Struktur der Arbeit. Auf Grund der zunächst notwendigen Entwicklung der Modellvorstellungen zum kognitiven Prozess des Modellbildens und dem Kompetenzstrukturmodell sowie der Ergänzung durch einen weiteren Theoriebaustein bilden die Theorieebenen die inhaltliche Strukturierung der Arbeit jedoch nicht exakt ab. Daher wird im Folgenden ein Überblick über den Aufbau der Arbeit gegeben.

In Teil I wird in Kapitel 2 der Forschungsgegenstand dargestellt und relevante Begriffe zum mathematischen Modellieren bereitgestellt. Des Weiteren wird in diesem Kapitel der Arbeit das mathematische Modellieren als Gegenstand der mathematikdidaktischen Diskussion dargestellt.

In Kapitel 3 werden die für die Arbeit relevanten Aspekte der Tätigkeitstheorie vorgestellt. Dabei wird zunächst die Tätigkeit als spezifische Form der menschlichen Aktivität charakterisiert (Abschnitt 3.1) und das mathematische Modellieren als Tätigkeit beschrieben (Abschnitt 3.2). Diese Interpretation des mathematischen Modellierens als Tätigkeit stellt eine notwendige Voraussetzung dar, um das mathematische Modellieren als Tätigkeit analysieren zu können. Aus diesem Grund werden die zentralen Merkmale von Tätigkeit unmittelbar mit dem mathematischen Modellieren in Beziehung gesetzt. Dabei wird deutlich, dass das mathematische Modellieren als Tätigkeit verstanden werden kann. Es wird jedoch auch deutlich, dass nicht jede Bearbeitung einer

Modellierungsaufgabe eine Tätigkeit des mathematischen Modellierens darstellt. Anschließend werden in den Abschnitten 3.3 und 3.4 die relevanten tätigkeitstheoretischen Grundlagen vorgestellt.

Die Analyse des Gegenstands erfolgt in Teil II der Arbeit. Dabei wird zunächst mit Bezug auf die bereitgestellten theoretischen Grundlagen das Vorgehen der Analyse beschrieben (Kapitel 4). In Kapitel 5 werden die zuvor differenzierten Modellierungsaktivitäten analysiert. Die im Rahmen der Analyse entwickelten Modellvorstellungen zum kognitiven Prozess des Modellbildens werden in Abschnitt 5.5 zusammengefasst. Das Kompetenzstrukturmodell wird dann als zentrales Ergebnis der Analyse in Kapitel 6 dargestellt.

Der ergänzende Theoriebaustein für einen Rahmen zur langfristigen Förderung von Modellierungskompetenzen sowie die vierte Theorieebene und die exemplarischen Konkretisierungen sind Gegenstand des abschließenden Teils der Arbeit (Teil III). In Kapitel 7 wird zunächst das *spielgemäße Konzept* aus der Sportdidaktik vorgestellt, das die langfristige Förderung und Entwicklung einer situationsangemessenen Handlungsfähigkeit in komplexen Anforderungssituationen im Blick hat. Die aus dem Konzept resultierenden Überlegungen zum Aufbau einer langfristigen und systematischen Förderung werden anschließend auf das mathematische Modellieren übertragen. Das Modellierenteilcurriculum und die Aspekte zur Förderung stellen das Resultat dieser Übertragung auf das mathematische Modellieren dar (siehe Kapitel 8).

Formale Hinweise

Die Quellenangaben in dieser Arbeit erfolgen in Anlehnung an den APA-Standard. Wörtliche Zitate werden dabei entweder durch Anführungszeichen kenntlich gemacht oder, falls das wörtliche Zitat länger als drei Zeilen ist, als Blockzitat behandelt. Das Blockzitat wird eingerückt und in einer kleineren Schriftart als der umgebende Text gesetzt. Die Verweise auf die Quellen erfolgen durch Kurzverweise, so dass die Quelle über das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit nachvollzogen werden kann. Wörtliche Zitate werden grundsätzlich im Wortlaut, der originalen Verschriftlichung, also inklusive enthaltener Tippfehler und entsprechend des Textsatzes, also inklusive Hervorhebungen, Unterstreichungen o.ä. übernommen, ohne dass dies explizit erwähnt wird. Wird im wörtlichen Zitat eine Ergänzung oder Veränderung vorgenommen, wird diese Ergänzung in runde Klammern gesetzt und durch den Zusatz „[Anmerkung UB]“ oder einen ähnlichen Hinweis in eckigen Klammern kenntlich gemacht. Sinngemäße Zitate werden ebenfalls durch Kurzverweise ausgewiesen, dabei wird das sinngemäße Zitat durch den Zusatz „vgl.“ kenntlich gemacht. Abbildungen und Tabellen, die aus anderen Quellen in der Arbeit verwendet werden, werden wie Zitate behandelt. Wird eine Abbildung in leicht veränderter Form in der Arbeit wiedergegeben, wird dies durch den Zusatz „modifiziert nach“ ausgewiesen.

Teil I

Theoretischer Hintergrund

> Wir finden heute in der ständig zunehmenden Flut von Literatur (. . .) vor allem Teilantworten, vergleichbar den Teilen in einem Puzzle. Dabei fehlen dem Puzzle viele Teile, das ist jedoch nicht sein Hauptproblem. Wer sich nämlich daran wagt, aus den Teilen ein Gesamtbild zusammenzusetzen, wird vor ein unlösbares Problem gestellt: Dem Puzzle fehlt die Anleitung.
>
> *(Giest & Lompscher, 2006, S. 9)*

2 Hintergrund zum Forschungsgegenstand: Mathematisches Modellieren

In diesem Abschnitt wird das mathematische Modellieren als Gegenstand dieser Arbeit und Gegenstand der mathematikdidaktischen Diskussion vorgestellt. Dabei sollen zum einen wichtige Begriffe für die Arbeit geklärt werden, zum anderen soll das mathematische Modellieren als Lerngegenstand präzisiert werden.

Eine Präzisierung für diese Arbeit ist erforderlich, da die Diskussion zum mathematischen Modellieren auf Grund ihrer Breite weder in den verwendeten Begriffen einheitlich ist, noch die unter dem Begriff mathematisch Modellieren verstandenen Gegenstände identisch sind. Zwar wird der Begriff *mathematisch Modellieren* in der nationalen fachdidaktischen Diskussion noch nicht lange benutzt (vgl. Blum, 2007, S. 3), dennoch zeigt sich auch in der nationalen Diskussion eine uneinheitliche Verwendung.

Eine erste Annäherung an den Begriff erfolgt daher in Abschnitt 2.1 anhand zweier historischer Beispiele, die als mathematische Modellierungsaktivitäten bezeichnet werden können. Anschließend werden die Beispiele genutzt, um verschiedene Facetten des mathematischen Modellierens zu benennen. Anhand verschiedener Fokusse, die zentrale Aspekte des mathematischen Modellierens benennen, wird der Gegenstand differenziert diskutiert. Im Rahmen dieser Diskussion werden verschiedene Positionen berücksichtigt. Dieser Teil schließt mit einem Fazit zur Begriffsbildung, in dem insbesondere auf das Verständnis des mathematischen Modellierens im Zusammenhang mit den KMK-Bildungsstandards eingegangen wird (siehe Abschnitt 2.1.5.1). In diesem Abschnitt wird auch geklärt, in welchem Sinne zentrale Begriffe im Rahmen dieser Arbeit verstanden werden.

Das mathematische Modellieren als Gegenstand der fachdidaktischen Forschung mit „verschiedenen Gesichtern“ ist Gegenstand in Abschnitt 2.2. In diesem Abschnitt werden auch verschiedene Modellierungsperspektiven als Richtungen innerhalb der Fachdidaktik Mathematik benannt. Dabei wird auch

U. Böhm, *Modellierungskompetenzen langfristig und kumulativ fördern,* Perspektiven der Mathematikdidaktik, DOI 10.1007/978-3-658-01821-4_2, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

knapp auf verschiedene Strömungen und ihre Entwicklung zurückgeblickt, die die aktuellen Perspektiven beeinflusst haben.

In einem abschließenden Teil (Abschnitt 2.3) werden weitere Aspekte des mathematischen Modellierens als Gegenstand der fachdidaktischen Forschung benannt, die im Rahmen dieser Arbeit relevant sind. Dazu gehört die Diskussion verschiedener Konzepte von Modellierungskompetenz und die Darstellung einiger Studien zum mathematischen Modellieren, um den aktuellen Stand der mathematischen Forschung darzustellen. Des Weiteren wird in diesem Abschnitt kurz der Technologieeinsatz beim mathematischen Modellieren angesprochen.

2.1 Diskussion des Forschungsgegenstandes zur Begriffsklärung

In diesem Abschnitt wird das mathematische Modellieren als Kompetenz der KMK-Bildungsstandards und somit als Lerngegenstand für den Unterricht (vgl. KMK, 2004) sowie als Gegenstand der fachdidaktischen Diskussion behandelt. Dazu werden verschiedene Facetten des mathematischen Modellierens diskutiert. Diese Facetten werden anhand verschiedener Fokusse auf den Gegenstand zum Ausdruck gebracht.

Für diese Diskussion wird der Gegenstand in einer ersten Annäherung durch zwei Beispiele illustriert. Diese beiden Beispiele verweisen auf historische Modellierungsaktivitäten. Das erste Beispiel ist die Erdumfangsberechnung, wie sie nach der Überlieferung von Cleomedes von Eratosthenes vorgenommen wurde. Das zweite Beispiel geht auf das Teilungsproblem zurück.

Auf Grundlage der Diskussion der Beispiele unter den verschiedenen Fokussen wird schließlich geklärt, in welchem Sinne zentrale Aspekte und Begriffe im Rahmen dieser Arbeit verstanden werden.

Beispiel 1: Die Bestimmung des Erdumfangs

In Schulbüchern findet man die Beschreibung der Erdumfangsberechnung nach Eratosthenes, wie sie von Cleomedes überliefert wurde (siehe z.B. Griesel, Postel & Suhr, 2007, S. 191). Zwar existieren Zweifel, ob die Darstellung von Cleomedes historisch korrekt ist (vgl. Goldstein, 1984), dennoch lässt sich die auf Cleomedes zurückgehende Beschreibung als Beispiel für einen Modellierungsprozess nutzen. Ausgangspunkt ist die Frage: „Wie groß ist der Erdumfang?“

Der Überlieferung zufolge stellt Eratosthenes am Tag der Sonnenwende in Syene fest, dass die Sonne mittags senkrecht über der Erde stand. Denn in einem tiefen Brunnen, in dem der Wasserspiegel an allen anderen Tagen im Schatten lag, sah er zur Mittagszeit das Spiegelbild der Sonne. Zur gleichen Zeit warf in Alexandria, das nördlich von Syene gelegen war, ein hoher Obelisk einen Schatten. In Alexandria fielen also die Sonnenstrahlen nicht senkrecht auf die Erde, sondern mit einer Abweichung zur Senkrechten, die mit dem Winkel α angegeben werden soll. Eratosthenes bestimmte den Wert des Winkels mit $\alpha \approx 7,2^\circ$. Unter den Annahmen, dass die Erde eine Kugel sei und die Sonnenstrahlen alle parallel zueinander auf die Erde treffen, kann die Situation wie in Abbildung 2.1 geometrisiert werden (vgl. Aumann, 2006, S. 116f).

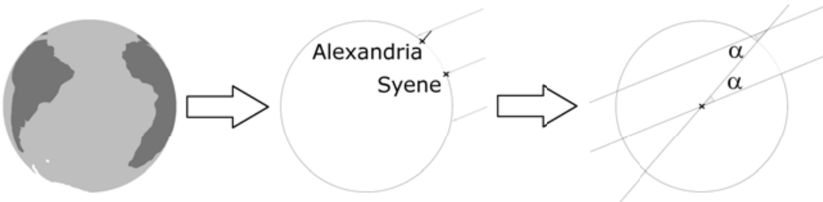

Abbildung 2.1: Geometrisierung zur Erdumfangsberechnung.

Das geometrische Modell auf der rechten Seite der Abbildung 2.1 zeigt nun, dass sich der Abstand zwischen Alexandria und Syene zum Erdumfang verhält wie α zu 360°. Mit einem Wert von 5040 Stadien für den Abstand zwischen Alexandria und Syene konnte der Erdumfang U berechnet werden (vgl. Aumann, 2006, S. 116f) mit:

$$U \approx \frac{360^\circ \cdot 5040}{7,2^\circ} = 252000$$

Will man das Ergebnis von Erathostenes heute überprüfen, ist eine Umrechnung der Einheit Stadien erforderlich. Es gibt jedoch verschiedene Angaben über die Länge eines Stadions, so dass der von Eratosthenes ermittelte Wert zwischen 39300 km und 41675 km liegt (vgl. Ludwig, o. J., S. 2).

Beispiel 2: Das Problem der abgebrochenen Partie

Das Problem der abgebrochenen Partie oder das Teilungsproblem ist eines der Probleme, über die sich Fermat und Pascal in einem Briefwechsel im Jahr 1654 ausgetauscht hatten. „Dieses Jahr gilt seither als die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitstheorie als mathematische Teildisziplin“ (Büchter & Henn, 2007, S. 265).

Die folgende Formulierung des Teilungsproblems in heutiger Sprache stammt von Büchter und Henn (2007, S. 263).

> **Das Teilungsproblem**
>
> Zu Beginn eines Glücksspiels, das aus mehreren Einzelspielen besteht, hinterlegen die Spieler Armin und Beate einen Einsatz in gleicher Höhe. Bei jedem Einzelspiel haben sie die gleiche Chance, zu gewinnen; „unentschieden“ ist nicht möglich. Den gesamten Einsatz bekommt derjenige Spieler, der als erster 5 Einzelspiele gewonnen hat. Vor Erreichen des Spielziels muss das Spiel beim Spielstand 4 : 3 abgebrochen werden. Wie soll mit dem Einsatz verfahren werden?

Von Schneider (1988) wurden verschiedene Texte zu diesem Problem in ihrer historischen Reihenfolge als Übersetzungen zusammengestellt. Als älteste vollständig erhaltene Aufzeichnung nennt Schneider (1988) den Beitrag von Luca Pacioli aus dem 15. Jahrhundert. Eine ausführlichere Darstellung der Beiträge von Pacioli, Cardano und Tartaglia zum Teilungsproblem enthält Abschnitt 5.4.3 (ab Seite 224). Ohne die Details der Vorschläge an dieser Stelle vorwegzunehmen, sei hier erwähnt, dass die drei Lösungen von Pacioli, Cardano und Tartaglia alle unterschiedlich ausfallen. Zum oben formulierten Problem würde nach Pacioli der Einsatz im Verhältnis 4 : 3, nach Cardano im Verhältnis 3 : 1 und nach Tartaglia im Verhältnis 6 : 4 geteilt (vgl. Büchter & Henn, 2007, S. 264).

Der von Pascal und Fermat erarbeitete Vorschlag zum Teilungsproblem beruht darauf, die Wahrscheinlichkeiten für den Sieg beider Spieler bei gegebenem Spielstand zu ermitteln und den Gewinn entsprechend dieser Wahrscheinlichkeiten zu teilen. Das Baumdiagramm in Abbildung 2.2 enthält die möglichen Spielverläufe ausgehend vom Spielstand 4 : 3. Gewinnt Armin das nächste Einzelspiel, ist das Spiel für Armin entschieden. Gewinnt Beate das nächste Einzelspiel, ist der Spielstand 4 : 4 und ein weiteres Einzelspiel ist für eine Entscheidung notwendig.

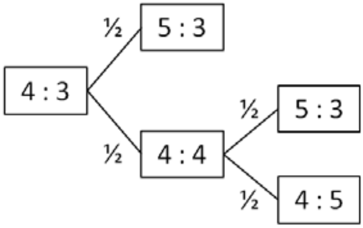

Abbildung 2.2: Baumdiagramm zum Teilungsproblem nach Büchter und Henn (2007, S. 266).

Mit den Pfadregeln ergeben sich unter der Annahme einer gleichen Gewinnwahrscheinlichkeit von 50% für Armin und Beate folgende Wahrscheinlichkeiten (vgl. Büchter & Henn, 2007, S. 266):

$$P(\text{Armin gewinnt}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ und } P(\text{Beate gewinnt}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Diesem Beispiel liegt das reale Problem einer gerechten Aufteilung zugrunde. Die vorgeschlagenen Aufteilungen sind normative Vorschläge und „können im Hinblick darauf diskutiert werden, ob sie mehr oder weniger angemessen und akzeptabel sind, aber keinesfalls, ob sie richtig oder falsch sind“ (Büchter & Henn, 2007, S. 266). Eine solche kritische Reflexion über die Unangemessenheit des Vorschlags von Pacioli durch Cardano ist auf Seite 225 zu finden.

2.1.1 Fokus I: Modellauffassung

Bei der Erdumfangsberechnung wird zunächst die Realität idealisiert, in dem die Erde als Kugel und die Sonnenstrahlen als parallel angenommen werden. Anschließend wird das Problem auf eine elementargeometrische Berechnung am Kreis übertragen. In diesem mathematischen Modell (siehe die Darstellung ganz rechts in Abbildung 2.1) sind von der ursprünglichen realen Situation mit dem Schatten des Obelisken in Alexandria und dem Brunnen in Syene nur noch abstrakte Repräsentationen übrig. Die für die Berechnung notwendigen Informationen werden durch geometrische Objekte und Beziehungen repräsentiert. Diese Geometrisierung ist motiviert durch das Ziel, den Erdumfang zu bestimmen und das mathematische Modell ist ein gutes Mittel, diesen Zweck zu erreichen.

Auch im Teilungsproblem wird die außermathematische Situation der abgebrochenen Partie in ein mathematisches Ersatzsystem übertragen. Interessant ist dabei, dass im Lösungsvorschlag von Pascal und Fermat die vom Zeitpunkt des Spielabbruchs an möglichen weiteren Spielverläufe zum Gegenstand der Modellierung im Baumdiagramm werden und nicht das reale Geschehen bis zum Spielabbruch. In anderen historischen Lösungsvorschlägen finden sich Modelle, in denen die Verteilung aus den bisher absolvierten Einzelspielen ermittelt wird (siehe Seite 224). Abhängig vom Zweck, mit mathematischen Mitteln eine faire Aufteilung des Einsatzes zu ermitteln, muss also eine Entscheidung getroffen werden, welche Aspekte der realen Situation relevant sind und wie damit umgegangen werden soll.

In beiden historischen Beispielen finden sich somit drei Merkmale, die nach Stachowiak (1973) für Modelle charakteristisch sind und von Filler (2009, S. 4f) zur theoretischen Fundierung der Diskussion in der Fachdidaktik aufgegriffen werden. Diese drei Merkmale sind:

Abbildungsmerkmal: Modelle sind Abbildungen bzw. Repräsentationen von natürlichen oder künstlichen Originalen (Prototypen), also „Modelle von etwas“. Solche Modelle können selbst wieder zu Modellen werden.

Verkürzungsmerkmal: Das Modell enthält nicht alle Merkmale des repräsentierten Originals, sondern nur diejenigen, die als relevant erachtet werden.

Pragmatisches Merkmal: Modelle erfüllen für eine bestimmte Zeit eine bestimmte Funktion für bestimmte Subjekte. Der Modellbildung liegt also ein spezifischer Zweck zugrunde.

Dabei arbeitet Filler (2009, S. 4) mit Bezug auf Apostel (1961) auch heraus, dass ein modellbildendes Subjekt ein Modell immer auf Grund des Zweckes auswählt oder erstellt. Bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben im Unterricht kann nun der Zweck durch den unterrichtlichen Kontext stark beeinflusst werden. So liegt bei der Behandlung der Erdumfangsbestimmung nach Eratosthenes durch Griesel et al. (2007, S. 191) sicher nicht das Erkenntnisinteresse an einem Wert für den Erdumfang als Zweck der Bearbeitung im Mittelpunkt. Vielmehr geht es wohl darum, den Lernenden zu zeigen, wozu die mathematischen Mittel genutzt werden können, bzw. in der Geschichte genutzt wurden, die in den nächsten Unterrichtsstunden behandelt werden. Wieder ein anderer Zweck ergibt sich für die Lernenden, wenn eine Modellierungsaufgabe in einer Bewertungssituation zu bearbeiten ist. Sicher wird es dann auch darum gehen, gewissen Erwartungen an die Bearbeitung von Prüfungsaufgaben gerecht zu werden[1].

In dieser allgemeinen Modellauffassung können Modelle und Originale

> Bilder, Wahrnehmungen, Zeichnungen, Formalismen, Kalküle, Sprache oder physische Systeme sein; sie können gleichen oder verschiedenen dieser Kategorien angehören. Insbesondere können *Prototyp und Modell ihre Rolle tauschen* (Filler, 2009, S. 4).

So kann ein verkleinertes Bauwerk ein Modell eines vorhandenen Bauwerks sein, das etwa als Souvenier verkauft wird. Das verkleinerte Bauwerk kann aber auch Prototyp eines zu schaffenden Bauwerkes sein. Im Mathematikunterricht gilt das gleiche z.B. für den geometrischen Begriff „Pyramide“ und eine Holzpyramide. So kann der geometrische Begriff Modell der Holzpyramide als Original sein, wenn an der Holzpyramide Größen bestimmt werden sollen. Es ist jedoch auch denkbar, dass die Holzpyramide zum Modell wird, um den geometrischen Begriff als Original zu veranschaulichen (vgl. Filler, 2009, S. 4f).

Dabei wird das hier genannte Beispiel zur Veranschaulichung des mathematischen Begriffs Pyramide als Original durch eine Holzpyramide als Modell in der Regel nicht als mathematisches Modellieren verstanden. Anhand der Begriffe Original und Modell kann also das Spezifische des mathematischen Modellierens präziser gefasst werden. Ein einheitliches Bild lässt sich für die Präzisierung des Modells erkennen. So hat beim mathematischen Modellieren eine Repräsentation aus „der Welt der Mathematik“ als mathematisches Modell eine zentrale Position (vgl. u.a. Niss, Blum & Galbraith, 2007, S. 4; Kaiser & Sriraman, 2006, S. 302; Leiß & Blum, 2006, S. 40; Henn, 2002, S. 9). Es geht immer darum, dass beim mathematischen Modellieren Mathematik als Mittel zum Zweck eingesetzt wird. Weniger eindeutig ist die Lage für eine Präzisierung des Originals. Zwar wird für das mathematische Modellieren häufig gefordert, dass es um außermathematische Originale gehen soll (vgl. u.a. Niss et al., 2007, S. 4; Leiß & Blum, 2006, S. 40; Henn, 2002, S. 9), im Anspruch an den Realitätsgehalt lassen sich jedoch deutliche Unterschiede erkennen (siehe dazu ausführlicher Abschnitt 2.1.3, ab Seite 29).

[1] Mein Dank gilt der Anregung von Andreas Filler in einer E-Mail vom 21.07.2011. Siehe dazu auch Filler (2009, S. 4).